

# Extensions maximales et classification des tores lorentziens munis d'un champ de Killing

Ch Bavard, P Mounoud

15 janvier 2016

## Abstract

We study the simply connected inextendable Lorentzian surfaces admitting a Killing vector field. We construct a natural family of such surfaces, that we call “universal extensions”. They are characterized by a condition of symmetry, the “reflexivity”, and a by a rather weak completeness assumption, the absence of “saddles at infinity”. Considering these surfaces as model spaces, we study their minimal quotients, divisible open sets and conjugate points. We show uniformisation results (by an open subset of one of these universal extensions, which is uniquely determined) in the following cases: compact surfaces and analytical surfaces. It allows us to give a classification of Lorentzian tori and Klein bottles with a Killing vector field.

## Résumé

Nous étudions les surfaces lorentziennes simplement connexes, inextensibles et possédant un champ de Killing. Nous introduisons une famille naturelle de telles surfaces, désignées par « extensions universelles ». Elles sont caractérisées par une condition de symétrie, la « réflexivité », et par une condition de complétude assez faible, l'absence de « selles à l'infini ». Ces surfaces jouent le rôle d'espaces modèles : nous en étudions les quotients, les ouverts divisibles et les points conjugués. Nous établissons des résultats d'uniformisation (par un ouvert de l'une de nos extensions universelles, uniquement déterminée) dans les deux cas suivants : surfaces compactes, surfaces analytiques. Cela nous permet notamment d'obtenir une classification des tores lorentziens et des bouteilles de Klein possédant un champ de Killing.

## 1 Introduction

L'étude des variétés possédant beaucoup d'isométries est un thème classique en géométrie riemannienne et pseudo-riemannienne. Nous nous intéressons ici à la géométrie globale des surfaces lorentziennes admettant un champ de Killing complet, c'est-à-dire dont le groupe d'isométrie n'est pas discret. La question de la classification de ces surfaces est abordée en privilégiant le point de vue des structures géométriques, cadre dans lequel les objets sont localement modélés par un pseudo-groupe de transformations d'un espace modèle. Parmi toutes les surfaces dont la géométrie locale est donnée, en un sens qui sera précisé plus bas, nous exhibons un « objet universel », noté pour l'instant  $E^u$ , jouant le rôle de modèle et généralisant les modèles classiques bien connus en courbure constante. Il s'agit d'une surface lorentzienne simplement connexe et maximale c'est-à-dire inextensible, que l'on peut caractériser par des propriétés de symétrie et de complétude (voir théorème 1.1). Sa construction

met en évidence un phénomène qui contraste avec le cas riemannien : l'existence d'une grande variété (géométrique et topologique) d'exemples de surfaces munies d'un champ de Killing, y compris parmi les quotients du modèle lui-même. Dès lors se pose la question de trouver de « bonnes » classes de surfaces *uniformisées* par le modèle, c'est-à-dire dont le revêtement universel est isométrique à un ouvert du modèle *via* une application développante. Notre surface universelle  $E^u$  conduit à des résultats d'uniformisation dans plusieurs contextes significatifs : surfaces compactes, surfaces analytiques. Dans le cas compact (tores et bouteilles de Klein), nous en déduisons une classification assez précise des objets.

Parmi les résultats sur la géométrie des variétés ayant un « gros » groupe d'isométrie, on peut citer comme prototype le théorème de Ferrand [4] en géométrie conforme riemannienne. Le terme « gros » est bien sûr à préciser mais il signifie a minima « *qui n'agit pas proprement sur la variété* ». Notre travail se rapproche notamment de [9], dans lequel l'auteur étudie les surfaces lorentziennes globalement hyperboliques, et de [15] où les auteurs étudient les variétés lorentziennes compactes munies d'un champ de Killing – ayant une orbite de type temps – dont le groupe d'isométrie a une infinité de composantes connexes. Notre cadre de travail est un mélange des précédents : nous étudions les surfaces munies d'un champ de Killing sans nous limiter aux surfaces compactes ou globalement hyperboliques. Précisons qu'en dehors de cas élémentaires, l'action du flot d'isométries de notre modèle  $E^u$  n'est pas propre.

Les surfaces modèles lorentziennes de courbure constante ont évidemment un gros groupe d'isométrie, mais on peut vérifier qu'elles ne possèdent que peu de quotients. À l'inverse, pour une géométrie locale suffisamment générale, notre surface modèle  $E^u$  admet de nombreux quotients et leur topologie est très variée. Nous verrons en effet que  $E^u$  possède, en plus de son flot d'isométries, une combinatoire discrète de type hyperbolique, c'est-à-dire admet des sous-groupes discrets d'isométries dont la dynamique est conjuguée à celle d'un groupe fuchsien sur le plan.

Notre modèle est obtenu par extension de la géométrie locale. La notion d'extensibilité joue un rôle fondamental en géométrie lorentzienne. Dans un travail précédent [1], nous avons utilisé de façon essentielle la possibilité d'étendre le revêtement universel du tore de Clifton-Pohl en une surface lorentzienne dont toutes les géodésiques de type lumière sont complètes (on dira L-complète). On notera aussi que la construction de l'extension de Kruskal de la métrique de Schwarzschild se ramène à un problème d'extension d'une surface munie d'un champ de Killing, [12]. Nous allons voir que ces deux extensions peuvent être obtenues par le même procédé général.

Décrivons plus en détails le procédé évoqué ci-dessus, qui repose sur deux observations clés<sup>1</sup>. Premièrement, la présence d'un champ de Killing entraîne généralement l'existence d'isométries locales supplémentaires : les réflexions par rapport aux géodésiques de type temps ou espace perpendiculaires au champ de Killing, que l'on appellera *réflexions génériques*. Ces réflexions permutent les feuilletages de lumière. Dès qu'elles ne sont pas globalement définies, elle permettent d'étendre la surface en collant deux copies de celle-ci. Ensuite, nous cherchons des extensions aussi complètes que possible ; en particulier toute extension L-complète sera maximale. Les orbites de lumière du champ de Killing sont généralement incomplètes (géodésiquement) et le procédé d'extension par réflexion ne corrige pas ce défaut. La deuxième observation clé est que l'on peut, dans certaines conditions, adjoindre des points selles, c'est-à-dire des zéros du champ de Killing, afin de prolonger ses orbites de lumière incomplètes en géodésiques complètes.

Soit  $X$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$ , que nous supposons

---

1. Ce mode de construction de surfaces munies d'un champ de Killing a été repris dans [10], il permet de donner des familles de surfaces dont toutes les géodésiques de type espace sont fermées.

toujours non trivial et *complet*. Localement, l'un des feuilletages de lumière est défini par un champ  $L$  tel que  $\langle K, L \rangle = 1$ . La métrique se met alors sous la forme

$$2dx dy + f(x)dy^2, \quad (0)$$

avec  $L = \partial_x$  et  $K = \partial_y$  (voir lemme 2.3). La coordonnée locale  $x$ , bien définie modulo translation et changement de signe, sera appelée *coordonnée transverse*. Ainsi, la fonction  $f$  exprime la norme du champ de Killing dans la coordonnée transverse, laquelle norme étant évidemment un invariant de la géométrie locale du couple  $(X, K)$ . Pour le tore de Clifton-Pohl, on aura  $f(x) = \sin(2x)$  et pour la métrique de Schwarzschild  $f(x) = 1 - 2Mx^{-1}$  (avec  $M > 0$ , coordonnées dites de Eddington-Finkelstein, voir [14]). La courbure vaut  $f''(x)/2$ . Dans toute la suite de l'introduction, nous écartons le cas de la courbure constante. Le champ de Killing est alors unique à homothétie près (voir la preuve du lemme 2.1). Les changements de la coordonnée transverse et du champ de Killing se traduisent par une action – à droite – du groupe affine de la droite qui consiste à remplacer  $f(x)$  par  $a^{-2}f(ax + b)$  pour  $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ . La classe de  $f$  modulo cette action sera notée  $[[f]]$ , celle de l'action du sous-groupe donné par  $a^2 = 1$  sera notée  $[f]$ . Les classes  $[f]$  et  $[[f]]$  sont des invariants de la géométrie locale de  $(X, K)$  et de  $X$  respectivement.

Afin de définir une notion plus précise de « géométrie locale », nous supposons dans un premier temps que  $X$  est simplement connexe. L'espace  $\mathcal{E}_X$  des orbites non triviales du champ  $K$  est alors une variété connexe de dimension 1, généralement non séparée ; de plus, toute coordonnée transverse locale se globalise en une fonction lisse  $x \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$  qui induit un difféomorphisme local de  $\mathcal{E}_X$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ , proposition 2.21-(2). Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ . Nous dirons que  $(X, K)$  est de classe  $[f]$ , ou que  $X$  est de classe  $[[f]]$  quand on veut oublier le champ de Killing, si  $I = x(X)$  et  $\langle K, K \rangle = f \circ x$ . Plus généralement, si  $X$  n'est pas simplement connexe,  $(X, K)$  est dite de classe  $[f]$  si son revêtement universel  $\tilde{X}$  l'est. Cette condition signifie que la géométrie locale de la surface est partout déterminée, *via* la norme du champ, par une fonction définie sur un intervalle – optimal – de la droite numérique ; on dira que la *géométrie locale est uniforme*. La condition est satisfaite dans deux cas importants : les surfaces compactes ( $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$  est séparé) et les surfaces analytiques. Il faut noter qu'en général la norme du champ, comme fonction sur l'espace des orbites, ne se factorise pas de telle sorte.

On fixe maintenant une géométrie locale (au sens précédent) en se donnant une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ . La surface  $R_f = I \times \mathbf{R}$  munie de la métrique (0) est la surface la plus simple de classe  $[f]$ . Un des résultats principaux de cet article est l'existence d'une extension privilégiée de  $R_f$ , notée  $E_f^u$ . Cette surface est munie d'un champ de Killing, simplement connexe, maximale si  $f$  est inextensible (en particulier L-complète si  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$ ) et de classe  $[f]$ . Dans le cas particulier où  $f$  ne s'annule pas (on dira que  $f$  est *élémentaire*), on prend  $E_f^u = R_f$ , qui est effectivement maximale lorsque  $f$  est inextensible. Quand  $f$  s'annule, les réflexions génériques ne sont pas globalement définies. La surface  $E_f^u$  s'obtient alors à partir de  $R_f$  grâce aux deux opérations évoquées plus haut : *extension par réflexion* et *adjonction de selles*.

Un moyen de produire d'autres extensions de  $R_f$  consisterait à perturber  $E_f^u$  en dehors de  $R_f$ , tout en conservant un champ de Killing. Une telle surface ne serait évidemment plus de classe  $[f]$ . Cependant, en utilisant des réflexions non génériques, on peut trouver des extensions de  $R_f$  qui ressemblent beaucoup plus à  $E_f^u$ . Ainsi les surfaces de l'exemple 3.9 sont maximales, recouvertes (à l'exception des éventuels points selles) par des ouverts isométriques à  $R_f$ , mais ne sont pas de classe  $[f]$ . Pour une surface simplement connexe maximale, être à géométrie locale uniforme équivaut à une propriété de symétrie : la *réflexivité*. Soit  $X$  simplement connexe munie d'un champ de Killing et soit  $Y$  un ouvert de  $X$  isométrique à  $R_g$  pour une certaine fonction  $g$ . La réflexivité (définition 3.7) stipule que les réflexions gé-

nériques de  $Y$  s'étendent en des isométries locales définies au moins sur  $Y$  (ce qui fait défaut aux exemples 3.9). On verra que les réflexions génériques de  $E_f^u$  sont même globalement définies, lemme 3.10.

Supposons que  $f$  est inextensible et qu'elle s'annule, de sorte que  $E_f^u$  est une extension de classe  $[f]$ , simplement connexe, maximale et propre de  $R_f$ . On s'aperçoit à nouveau qu'une telle extension n'est pas forcément unique. En effet, le revêtement universel de  $E_f^u$  privé d'un point selle (s'il en existe) est une surface simplement connexe maximale de classe  $[f]$  contenant des copies de  $R_f$  et non isométrique à  $E_f^u$ . Pour une fonction  $f$  suffisamment générique, on sait même construire, en répétant cette seule transformation, une infinité non dénombrable d'extensions maximales de  $R_f$  deux à deux non isométriques et toutes de classe  $[f]$ , voir la fin du §3.3. Contrairement à  $E_f^u$ , ces surfaces possèdent par construction des géodésiques de lumière incomplètes portées par des trajectoires du champ de Killing : on dira abusivement qu'elles ont *des selles à l'infini*. Cette terminologie se justifie par l'incomplétude géodésique des trajectoires du champ qui tendent vers un point selle. Par exemple, dès que  $f$  admet des zéros simples, le bord de  $R_f$  dans  $E_f^u$  contient des points selles. L'absence de selles à l'infini (définition 3.2) apparaît ainsi comme une version affaiblie de la  $L$ -complétude. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence et d'unicité de nos surfaces modèles.

**THÉORÈME 1.1** (proposition 3.3 et théorème 3.21). *Pour toute fonction  $f \in C^\infty(I, \mathbf{R})$  inextensible, il existe une unique (à isométrie près) surface lorentzienne lisse  $E_f^u$  munie d'un champ de Killing complet  $K^u$  et caractérisée par les propriétés suivantes :  $(E_f^u, K^u)$  est simplement connexe, maximale ( $L$ -complète si  $I = \mathbf{R}$ ), de classe  $[f]$  et sans selles à l'infini.*

Ce résultat est valable y compris en courbure constante ( $f'' = 0$ ). De plus, si l'on écarte ce cas, deux surfaces  $E_f^u$  et  $E_g^u$  ( $f, g \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ ) sont isométriques si et seulement si  $[[f]] = [[g]]$ .

**COROLLAIRE 1.2.** *Toute surface lorentzienne analytique  $(X, K)$  (avec  $K$  non trivial et complet), simplement connexe et  $L$ -complète est isométrique à une surface  $E^u(f)$  pour une certaine fonction analytique  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$ .*

La surface  $E_f^u$  sera considérée comme espace modèle pour la géométrie locale de classe  $[f]$ . Nous appellerons également  $E_f^u$  *extension universelle associée à  $f$* , car elle a vocation à se substituer au revêtement universel dans les questions de classification, ou encore (comme dans [1]) pour analyser la géométrie globale. À ce stade, l'étude du groupe d'isométrie du modèle  $E_f^u$  s'impose.

**THÉORÈME 1.3** (voir théorème 4.4 et proposition 4.3). *Le groupe d'isométrie de  $E_f^u$  (supposée à courbure non constante) est le produit semi-direct du sous-groupe distingué engendré par le flot du champ et d'un sous-groupe discret  $G$ , non unique.*

Le groupe  $G$  se décompose lui-même en produit semi-direct d'un sous-groupe distingué « générique »  $G_{\text{gen}}$ , engendré par des réflexions génériques, avec un sous-groupe (non unique) isomorphe au groupe de symétrie de  $f$ . La structure algébrique de  $G$  – en particulier sa taille – dépend évidemment de  $f$ . Plus précisément, si  $Z_f$  désigne l'ensemble des zéros de  $f$ , le groupe  $G_{\text{gen}}$  est un groupe de Coxeter dont les générateurs correspondent bijectivement aux composantes connexes de  $I \setminus Z_f$ , proposition 4.6. En particulier, si  $f$  n'est pas périodique, le groupe  $G$  est virtuellement de Coxeter. Concernant les aspects dynamiques, nous établissons, proposition 4.9, que  $G$  agit proprement sur  $E_f^u$  si et seulement si les composantes de  $I \setminus Z_f$  ne s'accumulent pas dans  $I$  (on dira que  $f$  est de type fini). Cela nous permet de construire, remarque 4.12, une surface dont le groupe d'isométrie n'agit pas proprement bien qu'il soit de 2-torsion. À titre de comparaison, indiquons qu'il est montré dans [9] qu'un groupe

d'isométrie d'une surface lorentzienne globalement hyperbolique Cauchy compacte n'agissant pas proprement est toujours isomorphe à un sous-groupe d'un revêtement fini de  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$ . Dans le cas analytique (à courbure variable), nous montrons (corollaire 4.10) que le groupe d'isométrie de toute surface simplement connexe  $(X, K)$  est le produit semi-direct de sa composante neutre par un sous-groupe agissant proprement (comparer avec [15]).

Lorsque  $f$  est de type fini, l'action de  $G$  sur  $E_f^u$  est différentiablement conjuguée à celle d'un groupe (virtuellement) fuchsien sur le demi-plan de Poincaré ; nous décrivons précisément (en fonction de  $f$ ) ce groupe dont le sous-groupe générique est un groupe de réflexions hyperboliques, proposition 4.13. On peut donc considérer que la surface  $E_f^u$  est alors un objet dont la combinatoire est de nature hyperbolique. Nous montrons que  $G$  possède toujours des sous-groupes sans torsion d'indice au plus 4, correspondant aux plus petits quotients lisses de  $E_f^u$ . Nous explicitons le nombre et la topologie de ces quotients, proposition 4.28, ainsi que l'espace des déformations de ceux-ci, proposition 4.39. La quantité, tant d'un point de vue topologique que géométrique, de surfaces obtenues n'a rien à voir avec la situation analogue en géométrie riemannienne : toutes les surfaces non compactes de type fini apparaissent et les espaces de déformation sont de dimension arbitrairement grande (table 2 et proposition 4.39). Pour une géométrie locale donnée, suffisamment générale, on peut même réaliser tous les types topologiques finis et orientables, proposition 4.32.

Le rôle d'espace modèle, ou d'extension universelle, joué par la surface  $E_f^u$  est précisé par le résultat suivant (voir les théorèmes 3.21 et 3.24).

**THÉORÈME 1.4 (uniformisation).** *Soit  $X$  une surface lorentzienne connexe munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial et complet.*

- (1) *Soit  $f \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ . Si  $(X, K)$  est de classe  $[f]$ , alors  $X$  est modélisée sur  $E_f^u$ , en particulier son revêtement universel est étalé au-dessus de  $E_f^u$ .*
- (2) *La surface  $X$  est uniformisée par un ouvert d'une extension universelle (associée à une certaine fonction  $f$ ) dans chacun des cas suivants :*
  - (2-a)  *$(X, K)$  est à géométrie locale uniforme et sans selles à l'infini,*
  - (2-b) *le flot de  $K$  est périodique.*

*En particulier, les surfaces analytiques sans selles à l'infini et les surfaces compactes sont uniformisées par un ouvert d'une surface  $E_f^u$ .*

Comme nous l'avons déjà observé, les surfaces analytiques et les surfaces compactes (tores et bouteilles de Klein) admettent une géométrie locale uniforme, de type fini dans le cas analytique et périodique dans le cas compact. Sur les surfaces compactes, les champs de Killing sont toujours périodiques (à l'exception de certains champs dans le cas plat). Sans être incompatibles, les conditions (2a) et (2b) sont assez opposées ; ainsi pour un tore, dès que  $f$  possède un zéro simple, le flot du champ est périodique mais la surface admet des selles à l'infini. Les deux résultats d'uniformisation ci-dessus sont donc complémentaires. Quand  $f$  est de type fini, par exemple analytique, l'étude des surfaces maximales uniformisées par  $E_f^u$  se ramène à celle des ouverts maximaux de discontinuité, décrits par la proposition 4.35. L'exemple du revêtement universel de  $E_f^u$  privée de points selles montre que l'on ne peut espérer un théorème d'uniformisation général, même dans le cas analytique.

Revenons pour finir au cas compact. L'étude des espaces  $E_f^u$  permet de mieux comprendre les tores possédant un champ de Killing. En particulier, on déduit des résultats précédents que le revêtement universel d'un tel tore se plonge toujours dans une surface simplement connexe et L-complète. Le phénomène d'extension constaté dans [1] sur le tore de Clifton-Pohl n'a donc rien d'exceptionnel. Bien qu'il découle directement des théorèmes 1.1 et 1.4, le résultat suivant mérite un énoncé.

THÉORÈME 1.5 (extension universelle d'un tore). *Soit  $T$  un tore lorentzien lisse (resp. analytique) de dimension 2 muni d'un champ de Killing non trivial. Alors le revêtement universel de  $T$  possède une extension lisse (resp. analytique) munie d'un champ de Killing, simplement connexe,  $L$ -complète et réflexive. Une telle extension est unique à isométrie près.*

Dans le cas analytique, on a un résultat plus fort (corollaire 3.26) : *le revêtement universel d'un tore lorentzien analytique possédant un champ de Killing non trivial admet, à isométrie près, une unique extension analytique, simplement connexe et  $L$ -complète.*

Quand  $T$  n'est pas  $L$ -complet, l'extension du revêtement universel doit évidemment être propre. Le revêtement universel est au contraire inextensible si  $T$  est  $L$ -complet, c'est-à-dire (voir Sanchez [16]) si le champ de Killing ne change pas de type,  $T$  est alors complet. Bien que cette condition sur la géométrie locale  $[f]$  (qui ne change pas de signe) soit ouverte, ce cas est assez particulier. Le théorème 1.5 établit donc que la complétude est la seule obstruction à l'extensibilité du revêtement universel, pour les tores admettant un champ de Killing. On pourrait se demander plus généralement s'il est possible de caractériser les tores lorentziens dont le revêtement universel est extensible.

Le théorème 1.4 nous conduit à une classification des tores lorentziens admettant un champ de Killing. Contrairement à son analogue riemannien, le revêtement universel d'un tel tore n'est pas déterminé par la norme du champ (sauf si celle-ci ne change pas de signe, auquel cas le tore est complet), seule son extension universelle l'est. Ce problème de classification est lié à la description des ouverts divisibles des surfaces  $E_f^u$ . Il apparaît que ces ouverts sont les relevés de certaines géodésiques de l'espace des feuilles du champ de Killing de  $E_f^u$  et qu'ils peuvent être codés simplement par une donnée finie, mais arbitrairement grande. Nous pouvons alors donner la classification des tores et des bouteilles de Klein possédant un champ de Killing, voir corollaires 5.5, 5.10 et 5.13 (comparer avec Sanchez [16], voir aussi Matveev [8, théorème 4]). Cette étude nous permet également de déterminer, pour chaque géométrie locale périodique  $[f]$ , les composantes connexes de l'espace des métriques lorentziennes contenant un tore ou une bouteille de Klein localement modelé sur l'espace  $E_f^u$ , voir section 5.3.

Finalement, nous retournons rapidement à l'étude des points conjugués. Nous montrons que les surfaces  $E_f^u$  associées à un tore (c'est-à-dire avec  $f$  périodique) vérifient un théorème « à la Hopf » : elles contiennent toujours des points conjugués à moins qu'elles ne soient plates, proposition 5.28. Autrement dit, *si l'extension universelle associée à  $(T, K)$  n'a pas de points conjugués, alors  $T$  est plat*. Nous établissons aussi que les tores non plats ayant un champ de Killing et aucun point conjugué doivent ressembler en un sens assez précis à un tore de Clifton-Pohl (qui rappelons-le n'en possède pas, [1]), théorème 5.29. En particulier, un tel tore n'est jamais homotope à une métrique plate, ce qui étend un résultat de Gutierrez, Palomo et Romero [6] concernant les métriques globalement conformément plates.

## Contenu de l'article

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Géométrie associée à un champ de Killing</b>	<b>7</b>
2.1	Bandes. Extension par réflexion . . . . .	7
2.2	Structures géométriques transverses . . . . .	14
2.3	Adjonction de selles . . . . .	17

2.4	Unicité des selles . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Extensions maximales</b>	<b>22</b>
3.1	Construction de surfaces maximales . . . . .	22
3.2	Géométrie locale uniforme . . . . .	25
3.3	Uniformisation . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Isométries et quotients</b>	<b>33</b>
4.1	Espace des feuilles. Groupe d'isométrie . . . . .	33
4.2	Sous-groupes discontinus . . . . .	37
4.3	Quotients minimaux . . . . .	41
4.4	Ouverts de discontinuité . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Surfaces compactes : classifications, points conjugués</b>	<b>54</b>
5.1	Tores possédant un champ de Killing . . . . .	54
5.2	Bouteilles de Klein possédant un feuilletage de Killing . . . . .	57
5.3	Composantes de l'espace des métriques . . . . .	60
5.4	Points conjugués . . . . .	67

## 2 Géométrie associée à un champ de Killing

### 2.1 Bandes. Extension par réflexion

Tous les objets (surfaces, métriques lorentziennes, champs de vecteurs) sont supposés de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Dans la suite, on considère des couples  $(X, K)$  où  $X$  est une surface lorentzienne, *éventuellement à bord*, munie d'un champ de Killing *non trivial*  $K$ . Une isométrie entre deux couples  $(X, K)$  et  $(X', K')$  est une isométrie lorentzienne  $\Phi : X \rightarrow X'$  telle que  $\Phi_*(K) = K'$ . On dira que  $(X, K)$  est *saturée* si  $K$  est complet ; les composantes du bord (s'il est non vide) sont alors des orbites de  $K$ . On notera toujours  $\mathcal{K}$  le feuilletage de  $K$  et  $\mathcal{K}^\perp$  le feuilletage orthogonal à  $K$ , feuilletages définis en dehors des zéros de  $K$ .

On rappelle qu'une surface simplement connexe, complète et à courbure constante est isométrique au plan de Minkowski  $\text{Mink}_2$ , c'est-à-dire  $\mathbf{R}^2$  muni de la métrique  $2dxdy$ , ou à un multiple du revêtement universel de  $\text{dS}_2$ , la surface de de Sitter, c'est-à-dire le projectifié de  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  muni de la métrique induite par  $dx^2 + dy^2 - dz^2$ . On appelle « demi-plan de Minkowski » toute surface isométrique à un demi-plan ouvert de  $\text{Mink}_2$  dont le bord est une droite de type lumière, c'est-à-dire toute surface isométrique à  $\mathbf{R}^2$  muni de la métrique  $2dxdy + xdy^2$ . On appelle « domaine de de Sitter » toute surface isométrique au complémentaire d'une géodésique de lumière dans  $\text{dS}_2$ .

LEMME 2.1. *Soit  $X$  une surface lorentzienne connexe munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial et complet. Le groupe  $\text{Is}^\pm(X, K)$  des isométries de  $X$  qui préservent  $K$  au signe près coïncide avec  $\text{Is}(X)$ , sauf si le revêtement universel de  $X$  est à courbure constante et contient un demi-plan de Minkowski ou (quitte à multiplier la métrique par un scalaire) un domaine de de Sitter.*



*Preuve.* Supposons que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{K}_X$  des champs de Killing sur  $X$  soit de dimension 1. Il existe alors  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\Phi_*(K) = \lambda K$ . Si  $\langle K, K \rangle$  n'est pas identiquement nulle, on a  $\lambda^2 = 1$ . Sinon  $K$  est de type lumière et donc le revêtement universel de  $X$  est isométrique à un ouvert de  $\text{Mink}_2$  dont le bord est constitué de géodésiques de lumière invariantes par  $\Phi$  et  $K$ . Il en contient donc au plus une et  $X$  contient un demi-plan de Minkowski.

Supposons maintenant que  $\mathfrak{K}_X$  est de dimension au moins 2 (en fait égale à 2, le cas où  $\dim \mathfrak{K}_X > 2$  est bien connu, [18, p. 372]). Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux champs de Killing et soit  $p \in X$ . Si  $K_1(p)$  et  $K_2(p)$  sont non colinéaires, alors la courbure est constante près de  $p$ . Sinon, il existe  $K_3 \in \mathfrak{K}_X$  non trivial s'annulant en  $p$ . Ce point est nécessairement une selle de  $K_3$  (voir la preuve de la proposition 2.35) : à nouveau la différentielle de la courbure est nulle en  $p$ . Quitte à multiplier la métrique par un scalaire, la courbure de  $X$  est égale à 0 ou 1 et donc  $X$  est localement modelé sur  $\text{Mink}_2$  ou  $\text{dS}_2$ . En comparant les algèbres de Lie des champs de Killing locaux de  $X$  et du modèle, on voit que si  $\text{Is}(X)$  contient un sous-groupe abélien de dimension 2, alors  $X$  est plate et les champs  $K_i$  sont géodésiques et partout linéairement indépendants. Par conséquent  $X$  est isométrique au plan de Minkowski (et finalement  $\dim \mathfrak{K}_X = 3$ ). Sinon, il contient un sous-groupe localement isomorphe au groupe affine de la droite, noté  $\text{Aff}$ . Les orbites de dimension 1 de l'action d'un tel groupe sur  $\text{Mink}_2$  ou  $\text{dS}_2$  sont des droites de lumière isolées. Par conséquent,  $X$  contient une orbite ouverte  $U$  simplement connexe car son bord (si  $U \neq X$ ) est constitué de géodésiques de lumière proprement plongées. L'ouvert  $U$  est donc isométrique au groupe  $\text{Aff}$  muni d'une métrique lorentzienne invariante à gauche. Une telle surface est isométrique à un demi-plan de Minkowski ou à un domaine de de Sitter.  $\square$

**DÉFINITION 2.2** (rubans, bandes, carrés et dominos). Soit  $X$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$  complet *ne s'annulant pas*. On dit que  $(X, K)$  est

- (1) un *ruban* si  $X$  est simplement connexe et si l'un des feuilletages de lumière de  $X$  est partout transverse à  $K$  (y compris au bord s'il est non vide),
- (2) une *bande* (resp. un *carré*) si  $X$  est homéomorphe à  $[0, 1] \times \mathbf{R}$  (resp. à  $[0, 1]^2 \setminus \{0, 1\}^2$ ) avec  $\langle K, K \rangle$  nul au bord et non nul à l'intérieur de  $X$ ,
- (3) un *domino* si  $X$  est simplement connexe *sans bord* et si son champ  $K$  admet une unique orbite de lumière.

Un ruban  $(X, K)$  dans lequel on a choisi une orbite  $c_0$  de  $K$  (par exemple une orbite de lumière s'il en existe) sera appelé *ruban marqué* et noté  $(X, K, c_0)$ . Les dominos sont automatiquement des rubans, que l'on marquera toujours par l'unique orbite de lumière de leur champ de Killing.

**LEMME 2.3** (coordonnées adaptées). Soit  $(X, K, c_0)$  un ruban lorentzien marqué. Il existe un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  comprenant 0 et des coordonnées globales  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$  sur  $X$  dans lesquelles le champ et la métrique s'écrivent respectivement  $\partial_y$  et

$$2dx dy + f(x)dy^2 \quad (x, y) \in I \times \mathbf{R}, \quad (1)$$

la feuille  $c_0$  étant donnée par  $x = 0$ . Si le champ  $K$  admet une feuille de lumière, alors ces coordonnées sont uniques à translation près de la variable  $y$  (en particulier  $I$  et  $f$  sont uniques).

*Preuve.* Il existe un champ  $L$  sur  $X$  (qui est orientable) vérifiant  $\langle L, L \rangle = 0$ ,  $\langle K, L \rangle = 1$  et invariant par  $K$ , c'est-à-dire  $[K, L] = 0$ . Pour toute géodésique maximale  $\gamma$  tangente à  $L$   $U_\gamma$  le saturé de  $\gamma$  par le flot  $\Phi^t$  de  $K$ . Comme  $\gamma$  est maximale, chaque  $U_\gamma$  est ouvert. Les ouverts  $U_\gamma$  sont disjoints ou confondus,  $X$  est connexe, par conséquent  $X = U_\gamma$ . Puisque  $X$



est simplement connexe, toute géodésique  $\gamma$  coupe chaque orbite de  $K$  au plus une fois d'après le théorème de Poincaré-Bendixson. On prend comme coordonnée  $x$  le temps du flot de  $L$  normalisé par  $x = 0$  sur  $c_0$  (ce paramétrage est géodésique sur chaque orbite de  $L$ ) et pour  $y$  le temps du flot de  $K$  normalisé par  $y = 0$  sur une géodésique  $\gamma_0$ . Si  $K$  admet une feuille de lumière, alors le champ  $L$  est unique. Le seul changement possible de coordonnées est une translation, d'où l'unicité.  $\square$

*Remarque 2.4.* Si  $(X, K, c_0)$  est un domino, l'orbite de lumière  $c_0$  partage  $X$  en deux demi-espaces ouverts, que l'on notera  $X^\pm$ , donnés en coordonnées adaptées par  $\pm x > 0$ .

Localement, au voisinage d'une orbite non triviale  $c_0$  de  $K$ , il existe toujours au moins un champ  $L$  comme dans la preuve ci-dessus ; en particulier  $c_0$  est contenue dans un ruban ouvert. Un tel champ  $L$  est unique au voisinage des orbites de lumière de  $K$ , par exemple au voisinage du bord dans le cas d'une bande.

**PROPOSITION 2.5** (réflexions locales génériques). *Soit  $(U, K)$  une surface lorentzienne saturée homéomorphe au plan et telle que  $\langle K, K \rangle$  ne s'annule pas. Pour toute feuille  $\gamma$  du feuilletage orthogonal à  $K$ , il existe une isométrie indirecte  $\sigma_\gamma : U \rightarrow U$  fixant  $\gamma$  point par point. Cette isométrie  $\sigma_\gamma$  sera appelée réflexion locale générique d'axe  $\gamma$ .*

*Preuve.* D'après le lemme 2.3, la surface  $(U, K)$  admet une carte adaptée de la forme (1). Si  $G$  est une primitive de  $-1/f$  sur l'intervalle (ouvert)  $I$ , les feuilles du feuilletage orthogonal à  $K$  s'écrivent  $y = G(x) + \beta$  ( $\beta \in \mathbf{R}$ ). La réflexion définie par

$$x' = x, \quad y' = 2(G(x) + \beta) - y \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{R}) \quad (2)$$

est clairement une isométrie de  $U$ , qui inverse le champ  $K$ .  $\square$

Les rubans jouent un rôle central dans notre étude. Nous donnons maintenant une classification de ces objets et de leurs isométries. Certaines d'entre elles proviennent de symétries additionnelles de la fonction norme du champ  $K$ . Soit  $(X, K)$  un ruban et soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$  comme dans (1). On pose

$$\text{Is}(f) = \{\varphi \in \text{Is}(I, dx^2); f \circ \varphi = f\}, \quad (3)$$

où  $\text{Is}(I, dx^2)$  désigne le groupe des isométries euclidiennes de l'intervalle  $I$ . Le groupe  $\text{Is}(f)$  est trivial sauf si  $f$  admet une symétrie, une période ou les deux ; quand  $f$  est non constante, il est alors isomorphe respectivement à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  ou  $D_\infty$  (groupe diédral infini). Par ailleurs, on note  $\text{Is}_{\text{gen}}(X)$  le groupe formé par le flot de  $K$  et, si  $\langle K, K \rangle$  ne s'annule pas, par les réflexions génériques (voir proposition 2.5). Les éléments de  $\text{Is}_{\text{gen}}(X)$  seront appelés *isométries génériques* du ruban  $(X, K)$ .

**PROPOSITION 2.6** (classification et isométries des rubans).

- (1) *Les classes d'isométrie de rubans  $(X, K)$  tels que  $\langle K, K \rangle$  s'annule (resp. ne s'annule pas) correspondent bijectivement aux fonctions lisses modulo translation (resp. translation et changement de signe) de la variable.*
- (2) *Si  $(X, K)$  est un ruban à courbure non constante, alors le groupe d'isométrie  $\text{Is}(X)$  est isomorphe à un produit semi-direct  $\text{Is}_{\text{gen}}(X) \rtimes \text{Is}(f)$  du groupe des isométries génériques par le groupe de symétrie d'une fonction  $f$  associée à  $(X, K)$  ; de plus toute géodésique de lumière interne (maximale) définit une section  $\text{Is}(f) \rightarrow \text{Is}(X)$ .*

*Preuve.* La métrique et le champ d'un ruban  $(X, K)$  sont déterminés par une carte adaptée de la forme (1). Dans cette carte, la fonction  $f$  représente la norme  $\langle K, K \rangle$  exprimée dans la coordonnée transverse  $x$ . Si  $\langle K, K \rangle$  s'annule, le champ  $L$  est unique et  $f$  est bien définie modulo translation de  $x$ . Sinon, il existe deux champs transverses  $L$  et  $L'$  et deux cartes adaptées de la forme  $2dx dy + f(x)dy^2$  et  $2dx' dy' + f(-x')dy'^2$ . Le changement de carte s'obtient en composant  $x' = -x, y' = -y$  (qui inverse le champ de Killing) avec une réflexion de l'une des cartes, voir (2).

Toute isométrie  $\Phi$  d'un ruban  $(X, K)$  qui n'est pas à courbure constante envoie  $K$  sur  $\pm K$  (lemme 2.1). Posons  $(u, v) = \Phi(x, y)$  où  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$  sont des coordonnées adaptées. Si  $f$  s'annule, alors par unicité du champ  $L$  le couple de champs  $(K, L)$  est envoyé par  $\Phi$  sur  $(K, L)$  (cas (a)) ou sur  $(-K, -L)$  (cas (b)). Dans le cas (a) on a  $u = x + a, v = y + t$ ; de plus  $a = 0$  sauf si  $f$  est périodique (et  $I = \mathbf{R}$ ). Le cas (b) n'est possible que si  $f(b-x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$ , ce qui impose une symétrie à la fonction  $f$ . Si  $f$  ne s'annule pas, il existe deux champs  $L = \partial_x$  et  $L' = -\partial_x + 2/f(x)\partial_y$  vérifiant  $\langle K, L \rangle = \langle K, L' \rangle = 1$ . Aux possibilités (a) et (b) s'ajoutent les suivantes :  $(K, L')$  (cas (a')) et  $(-K, -L')$  (cas (b')). D'après la proposition 2.5, il existe une isométrie globale  $\sigma$  (réflexion générique) vérifiant (b'); si  $\Phi$  satisfait (a') ou (b'), alors  $\sigma \circ \Phi$  satisfait (b) et (a) respectivement. On est ramené aux cas précédents. Ensuite, le groupe  $\text{Is}_{\text{gen}}(X)$  est par définition distingué et l'assertion (2) se déduit facilement de la description des isométries. Noter que le stabilisateur d'une géodésique de lumière interne (maximale) est isomorphe à  $\text{Is}(f)$  et ne contient aucune isométrie générique non triviale.  $\square$

**PROPOSITION 2.7** (feuilletage de lumière transverse). *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne connexe, sans bord et munie d'un champ complet  $K$  ne s'annulant pas. On suppose de plus que  $X$  admet un feuilletage de lumière  $\mathcal{L}$  partout transverse à  $K$ . Dans ces conditions*

- (1) *le flot de  $K$  est transitif sur les feuilles de  $\mathcal{L}$ ,*
- (2)  *$X$  est homéomorphe au plan, au cylindre ou au tore; métriquement,  $(X, K)$  est un ruban ou le quotient d'un ruban.*

*Preuve.* La propriété (1) de transitivité s'obtient comme dans la preuve du lemme 2.3. Notons  $(\tilde{X}, \tilde{K})$  le revêtement universel de  $(X, K)$ , qui est un ruban sans bord. Tout élément  $\varphi \in \text{Aut}_X \tilde{X}$  doit être isométrique et respecter les champs  $\tilde{K}$  et  $\tilde{L}$  (en particulier  $\varphi$  préserve les feuilletages de lumière). En coordonnées adaptées, on trouve que  $\varphi$  est un élément du flot composé éventuellement avec une translation de la variable  $x$  (ce qui impose  $I = \mathbf{R}$  et  $f$  périodique dans (1)). Le groupe  $\text{Aut}_X \tilde{X}$  est donc abélien et composé d'isométries directes, d'où l'assertion (2).  $\square$

**LEMME 2.8** (types de bandes). *Toute bande lorentzienne  $(B, K)$  est de l'un des trois types suivants.*

- *Type I (ou bande standard) :  $(B, K)$  est un ruban. Les feuilletages  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\perp$  sont des suspensions. Le champ  $L$  est global, rentrant sur un bord et sortant sur l'autre.*
- *Type II :  $(B, K)$  n'est pas un ruban, le feuilletage  $\mathcal{K}$  est une suspension et  $\mathcal{K}^\perp$  est une composante de Reeb. Le champ (local)  $L$  est rentrant ou sortant au bord.*
- *Type III (ou type Reeb) :  $(B, K)$  n'est pas un ruban, le feuilletage  $\mathcal{K}$  est une composante de Reeb et  $\mathcal{K}^\perp$  est une suspension. Le champ  $L$  (local) est rentrant sur un bord et sortant sur l'autre.*

*Preuve.* Les feuilletages  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\perp$  coïncident au bord et sont transverses à l'intérieur. Le champ local  $L$  (près du bord) est partout transverse à  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\perp$ . Par définition il n'existe aucune feuille de lumière de  $K$  à l'intérieur de  $B$ . En conséquence, si l'un des feuilletages  $\mathcal{K}$

ou  $\mathcal{K}^\perp$  n'est pas une suspension (n'admet pas de transversale globale), alors il se réduit à une composante de Reeb. Considérons le fibré des directions au-dessus d'un arc  $\tau$  qui joint les deux composantes du bord. Il s'agit d'un cylindre  $[0, 1] \times \mathbf{S}^1$  séparé par les champs de lumière en deux ouverts (directions positives ou négatives de la métrique au-dessus de  $\tau$ ). Deux cas se présentent. Si le champ  $L$  est global, on voit que nécessairement les feuilletages  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\perp$  sont des suspensions (type I). Sinon, l'un des feuilletages  $\mathcal{K}$  ou  $\mathcal{K}^\perp$  est une composante de Reeb. On peut alors choisir  $\tau$  transverse aux deux feuilletages de lumière et donc à l'autre feuilletage qui est forcément une suspension : la bande est de type II ou III. Les trois types de bandes sont illustrés plus bas (voir la figure 1 et les commentaires attenants).  $\square$

**DÉFINITION 2.9.** Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne connexe, séparée et saturée par un champ de Killing  $K$ .

- (1) Une surface saturée  $(\widehat{X}, \widehat{K})$  est une *extension* de  $(X, K)$  si  $\widehat{X}$  est *connexe et séparée* et s'il existe un plongement isométrique  $\varphi : X \rightarrow \widehat{X}$  tel que  $\widehat{K}$  coïncide avec  $\varphi_*(K)$  sur  $\varphi(X)$ .
- (2)  $(X, K)$  est *maximale* (ou *inextensible*) si elle n'admet pas d'extension non triviale.

*Exemple 2.10.* Toute surface saturée  $(X, K)$  à bord est extensible. En effet, soit  $c$  une composante de  $\partial X$ . Quitte à remplacer  $X$  par un revêtement cyclique, on peut supposer que  $c$  est une orbite plongée de  $K$ . L'existence de coordonnées adaptées (1) dans un voisinage saturé de  $c$  montre alors que  $(X, K)$  s'étend au voisinage de  $c$  (analytiquement si  $(X, K)$  est analytique).

*Exemple 2.11.* Toute surface  $(X, K)$  dont les géodésiques de lumière sont complètes (on dira L-complète) est inextensible, voir la fin de la preuve de la proposition 3.3.

L'hypothèse de séparation entraîne que les surfaces compactes sont inextensibles au sens précédent. Il existe néanmoins des plongements isométriques de surfaces compactes ou complètes dans des surfaces connexes non séparées. Dès qu'une surface connexe  $(X, K)$  admet un ouvert saturé  $U$  non vide et propre (c'est le cas par exemple d'un tore plat muni d'un champ périodique), le recollement de deux copies de  $(X, K)$  le long de  $U$  est une « extension » connexe non séparée de  $(X, K)$ . On trouvera des exemples plus naturels dans la discussion qui suit la proposition 4.38.

*Remarque 2.12.* Nous montrerons plus loin (proposition 3.1) que la notion de maximalité introduite à la définition 2.9 (surfaces munies d'un champ de Killing) équivaut à la maximalité au sens usuel.

Nous décrivons maintenant un ingrédient essentiel du processus d'extension, basé sur l'existence de réflexions locales (voir proposition 2.5).

**LEMME 2.13** (lemme d'extension). Soit  $(X_1, K_1)$  et  $(X_2, K_2)$  deux surfaces lorentziennes connexes, séparées et saturées (avec ou sans bord). Soit  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) un ouvert saturé strict de  $X_1$  (resp. de  $X_2$ ) et soit  $\sigma : (U_1, K_1) \rightarrow (U_2, K_2)$  une isométrie. On suppose que pour tout  $p \in \partial U_1$  la fonction  $\sigma(q)$  n'admet aucune valeur d'adhérence quand  $q$  tend vers  $p$  ( $x \in U_1$ ). Alors les surfaces  $(X_1, K_1)$  et  $(X_2, K_2)$  sont extensibles.

*Preuve.* Soit  $X$  la surface définie en recollant  $(X_1, K_1)$  et  $(X_2, K_2)$  via l'isométrie  $\sigma$ . Plus précisément  $X$  est le quotient de  $X_1 \coprod X_2$  par l'identification de  $q \in U_1 \subset X_1$  avec  $\sigma(q) \in U_2 \subset X_2$ . Il s'agit d'une surface lorentzienne connexe, munie d'un champ de Killing  $K$  et possédant un ouvert strict isométrique à  $(U_1, K_1)$ . Il reste à vérifier que  $X$  est séparée. Les éventuels points de branchement se situent nécessairement au bord de  $U_1$ . Si  $p_1 \in \partial U_1 \subset X_1$ , les points  $p_2 \in \partial U_2 \subset X_2$  non séparés de  $p_1$  sont par construction les valeurs d'adhérences de  $\sigma(q)$  quand  $q$  tend vers  $p_1$ , d'où le résultat.  $\square$

COROLLAIRE 2.14 (extension par réflexion). *Toute bande lorentzienne  $(B, K)$  de type I ou II (le champ  $K$  est une suspension) est extensible, de façon unique à isométrie près, par un carré lorentzien  $(\widehat{B}, \widehat{K})$  (définition 2.2-(2)) avec  $B$  dense dans  $\widehat{B}$ .*

*Preuve.* Soit  $\sigma$  une réflexion générique définie sur l'intérieur  $U$  de  $B$  (proposition 2.5). Notons  $L_1, L_2$  les deux champs de lumière sur  $U$  normalisés par  $\langle L_i, K \rangle = 1$  ( $i = 1, 2$ ). La réflexion  $\sigma$  échange  $L_1$  et  $-L_2$ . En un point  $p \in \partial B$ , l'un des champs  $L_i$  est défini, disons  $L_1$ , supposé sortant, dont les orbites locales (au voisinage de  $p$ ) s'accumulent au bord. Pour les types I et II, les orbites de  $-L_2$  ne s'accumulent pas au bord (voir lemme 2.8). Par suite  $\sigma(q)$  ne peut avoir de valeurs d'adhérences quand  $q$  tend vers  $p$  (mais ce serait possible pour le type III). L'extension  $(\widehat{B}, \widehat{K})$  construite ci-dessus est clairement homéomorphe  $[0, 1]^2 \setminus \{0, 1\}^2$ . De plus  $B \simeq [0, 1] \times ]0, 1[$  est dense dans  $\widehat{B}$ . L'unicité d'une telle extension résulte de la classification des carrés et des bandes (propositions 2.15 et 2.17).  $\square$

L'espace des feuilles du champ  $K$  d'un carré est une variété riemannienne, proposition 2.21. Si  $J \subset \mathbf{R}$  est un intervalle, nous noterons  $J^\wedge$  la variété obtenue en identifiant (via l'identité) les intérieurs de deux exemplaires de  $J$  (intervalle avec bord double).

PROPOSITION 2.15 (description et classification des carrés). *Si  $(X, K)$  est un carré lorentzien, alors*

- (1)  *$(X, K)$  est recouvert par deux bandes de type I, échangées par des isométries indirectes de  $X$  (réflexions) et dont l'intersection coïncide avec l'intérieur de  $X$ ,*
- (2) *il existe un réel  $m > 0$  (appelé « largeur » du carré) et une fonction  $f \in C^\infty([0, m], \mathbf{R})$  telle que  $f^{-1}(0) = \{0, m\}$  qui caractérisent le couple  $(X, K)$  à isométrie près.*

*De plus, l'espace des feuilles de  $K$  est isométrique au segment à bord double  $[0, m]^\wedge$ .*

*Preuve.* Dans l'intérieur  $U$  de  $X$ , les deux feuilletages de lumière  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  sont transverses à  $K$ . Soit  $p \in \partial X$  et soit  $\ell$  la feuille de lumière maximale issue de  $p$  transversalement à  $\partial X$ . D'après la proposition 2.7, le saturé de  $\ell \cap U$  par le flot de  $K$  coïncide avec  $U$ . Tout point intérieur  $q \in U$  peut donc être joint à chacune des composantes du bord par une (unique) géodésique de lumière. Comme  $X$  est simplement connexe, les feuilles de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  se coupent au plus une fois. Cela entraîne que chaque feuille passant par  $q \in U$  doit joindre deux côtés opposés de  $X$ . Ainsi  $X$  est réunion de deux bandes  $B$  et  $B'$  de types I telles que  $B \cap B' = U$ . L'espace des feuilles de  $K$  est donc isométrique à  $[0, m]^\wedge$  pour un certain réel  $m > 0$ . Notons  $L$  et  $L'$  deux champs comme dans la preuve du lemme 2.3, définissant des coordonnées adaptées  $(x, y), (x', y') \in [0, m] \times \mathbf{R}$  sur  $B$  et  $B'$  respectivement. Soit  $\sigma : U \rightarrow U$  une réflexion par rapport à une géodésique orthogonale à  $K$ . On doit avoir  $\sigma_*(K) = -K$  et  $\sigma_*(L) = -L'$ . En coordonnées adaptées,  $\sigma$  est donc donnée par  $x' = m - x, y' = \beta - y$  ( $\beta \in \mathbf{R}$ ). Cette transformation s'étend aux bords des bandes  $(x, x' \in \{0, a\})$ . Par suite  $\sigma$  s'étend en une isométrie de  $X$  qui échange  $B$  et  $B'$ .

Étant donné un carré  $(X, K)$ , on note  $m > 0$  la masse des feuilles de  $K$ . La norme de  $K$  (vue comme fonction sur  $[0, m]^\wedge$ ) induit une fonction  $f = f_{X, K} \in C^\infty([0, m], \mathbf{R})$  comme dans l'énoncé, invariante sur la classe d'isométrie de  $(X, K)$ . Enfin, si  $f_{X', K'} = f_{X, K}$ , on construit (en utilisant comme ci-dessus des coordonnées adaptées) une isométrie entre les carrés  $(X, K)$  et  $(X, K')$ .  $\square$

Remarque 2.16 (feuille du milieu d'un carré). Si  $(X, K)$  est un carré de largeur  $m$ , le point  $m/2 \in [0, m]^\wedge$  sera appelé *feuille du milieu*. Il s'agit d'une feuille privilégiée du champ  $K$ , invariante par isométrie.

PROPOSITION 2.17 (classification des bandes). *Les classes d'isométries de bandes lorentziennes  $(X, K)$  sont caractérisées par*

- (1) *le type (I, II ou III),*
- (2) *un élément  $m \in ]0, +\infty]$  (largeur de la bande),  $m < +\infty$  pour les types I et II,*
- (3) *une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R})$  telle que  $f^{-1}(0) = \partial J$ , avec  $J = [0, m]$  pour le type I,  $J = [0, m]$  ou  $[-m, 0]$  pour le type II et  $J = [0, m[$  pour le type III.*

*L'espace des feuilles de  $K$  est isométrique à  $J$  pour les types I et II et à  $J^\wedge$  pour le type III.*

*Preuve.* On procède comme pour les carrés, en recouvrant la bande par des cartes adaptées (une carte pour le type I, deux cartes pour les types II et III). La largeur  $m$  est finie pour les types I et II d'après le lemme 2.14. Pour les bandes de type II,  $J = [0, m]$  (resp.  $J = [-m, 0]$ ) si le champ  $L$  est rentrant (resp. sortant).  $\square$

Remarque 2.18. Toute bande de type III (Reeb) admet des isométries indirectes qui inversent le champ et échangent les deux composantes de bord (on étend au bord les réflexions de l'intérieur comme dans la preuve de la proposition 2.15).

L'interaction entre les bandes et les carrés est illustrée à la figure 1. Les réflexions par rapport aux feuilles du feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$  (axes en pointillés sur la figure 1) se prolongent au carré. Du point de vue du champ, depuis l'intérieur du carré, les sommets (l'infini du carré) apparaissent de deux types : « selle » ou source/puits. Un carré de largeur  $m$  contient 2 bandes de type I (côtés opposés) et deux bandes de type II (côtés adjacents à une source/puits) toutes de largeur  $m$ , ainsi que deux familles de bandes de type III (côtés adjacents à une selle) de largeur  $m' \leq m$ . Les 2 bandes de types I (resp. de type II) sont échangées par les réflexions, tandis que les bandes de type III sont fixes d'après la remarque 2.18. À l'intérieur du carré, le 4-tissu formé par  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}^\perp$  et les deux feuilletages de lumière est invariant par les réflexions.

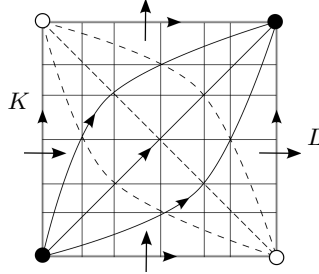


FIGURE 1 – Carré lorentzien

Remarque 2.19. Soit  $C$  un carré de largeur  $m$  et soit  $V$  un ouvert connexe saturé de  $C$  qui rencontre le bord  $\partial C$ . En fonction du nombre  $n$  de composantes de  $V \cap \partial C$ , l'ouvert  $V$  est de la forme suivante : *demi-bande* de largeur  $m' \in ]0, m]$  ( $n = 1$ ), *bande* ( $n = 2$ , types I et II de largeur  $m$ , ou III de largeur  $m' \in ]0, m]$ ), *quasi-carré* ( $n = 3$ ) ou *carré* ( $n = 4$ ).

PROPOSITION 2.20. *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne lisse homéomorphe au plan  $\mathbf{R}^2$  et munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial et complet. On note  $X_0$  la réunion des orbites de lumière du champ  $K$  et  $\Sigma$  l'ensemble de ses zéros. Soit  $U$  une composante connexe de  $X \setminus (X_0 \cup \Sigma)$ .*

- (1) *L'adhérence  $U^\vee$  de  $U$  dans  $X \setminus \Sigma$  est de l'un des types suivants (voir remarque 2.19) : carré, quasi-carré, bande (type I, II ou III), demi-bande,  $\emptyset$  ou  $X$ .*

(2) Si de plus  $(X, K)$  est maximale (par exemple  $L$ -complète), alors  $U^\vee$  est de l'un des types suivants :

- (i)  $U^\vee$  est un carré lorentzien,
- (ii)  $U^\vee$  est une bande de type Reeb (de largeur infinie si  $X$  est  $L$ -complète),
- (iii)  $U^\vee = \emptyset$  ou  $X$ .

*Preuve.* Comme  $X$  est homéomorphe au plan, le cône isotrope définit deux feuilletages de lumière. Toute feuille de lumière est une droite proprement plongée (voir par exemple [7]) ; par suite les orbites de lumière de  $K$  sont des droites plongées. Soit  $p \in \Sigma$  un zéro de  $K$  et soit  $\Phi_K^t$  le flot de  $K$ . La différentielle  $D_p \Phi_K^t$  définit un groupe à un paramètre d'isométries du plan tangent en  $p$ , groupe conjugué à  $\Phi_K^t$  près de  $p$  (par l'exponentielle en  $p$ ). Par suite, ou bien  $K$  est nul près de  $p$ , ou bien  $p$  est un point selle de  $K$  adhérent à 4 orbites de lumière de  $K$ . Par connexité de  $X$  (vu que  $K \neq 0$ ), l'ensemble des zéros  $\Sigma$  est nécessairement discret ; de plus  $X_0 \neq \emptyset$  dès que  $\Sigma \neq \emptyset$ .

On peut écarter les cas évidents  $X_0 = \emptyset$  ( $U^\vee = X$ ) et  $X_0 = X$  ( $U^\vee = \emptyset$ ). Soit  $\ell$  une feuille de lumière maximale qui coupe transversalement le bord  $\partial U$  de  $U$  dans  $X \setminus \Sigma$ . On a  $U = \cup_{t \in \mathbf{R}} \Phi_K^t(\ell \cap U)$  d'après la proposition 2.7. De plus le champ  $K$  n'a pas de feuilles fermées et  $\ell$  est une droite proprement plongée, donc  $U$  est homéomorphe au plan, et pour toute composante  $c$  de  $\partial U$ , il existe une carte adaptée (1) qui recouvre  $U \cup c$  ; en particulier tout point  $q \in U$  peut être relié à  $c$  par une unique géodésique de lumière  $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow U^\vee$  telle que  $\gamma(0) = q$  et  $\gamma(\alpha) \in c$ . Le nombre  $n \geq 1$  de composantes de  $\partial U$  ne peut donc excéder le nombre de rayons de lumière issus d'un point de  $U$ , c'est-à-dire 4. En examinant les valeurs possibles de  $n$ , on conclut grâce aux cartes adaptées que  $U^\vee$  est du type souhaité (voir remarque 2.19). La maximalité de  $(X, K)$  exclut les composantes vérifiant l'hypothèse du lemme d'extension 2.13, c'est-à-dire les quasi-carrés, les bandes de type I ou II et les demi-bandes.  $\square$

## 2.2 Structures géométriques transverses

Nous introduisons ici des structures géométriques transverses pour les feuilletages précédents : feuilletage  $\mathcal{K}$  associé au champ de Killing  $K$  et son feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$  définis sur l'ouvert  $\{K \neq 0\}$ , feuilletages de lumière. Ces structures, adaptées à diverses situations géométriques sur la surface, ont pour but de mesurer d'une part la « masse » des feuilles de  $\mathcal{K}$  et d'autre part le décalage du flot de  $K$ . Notamment, la structure projective transverse à  $\mathcal{K}^\perp$  (proposition 2.27) permet d'estimer le décalage du flot quand on tourne autour d'un point selle.

**PROPOSITION 2.21** (structure riemannienne transverse au champ de Killing). *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne (avec ou sans bord) saturée et connexe, avec  $K$  non trivial.*

- (1) *Le feuilletage  $\mathcal{K}$  associé au champ de Killing admet une métrique riemannienne transverse invariante par l'action de  $\text{Is}^\pm(X, K)$ .*
- (2) *Si  $X$  est simplement connexe, alors l'espace  $\mathcal{E}_{(X, K)}$  des feuilles de  $\mathcal{K}$  est une variété riemannienne connexe de dimension 1, avec ou sans bord, généralement non séparée. De plus, il existe une application lisse  $x \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$  qui induit une isométrie locale de  $\mathcal{E}_{(X, K)}$  dans  $\mathbf{R}$  ; en particulier  $\mathcal{E}_{(X, K)}$  est étalée au-dessus d'un intervalle de  $\mathbf{R}$ .*

*Preuve.* On choisit localement une forme volume lorentzienne  $\nu$ . Alors la forme  $i_K \nu$  est fermée (formule de Cartan) et définit localement le feuilletage  $\mathcal{K}$ . L'intégration de  $i_K \nu$  sur les transversales à  $\mathcal{K}$  définit une structure transverse modelée sur  $(\mathbf{R}, \text{Is}(\mathbf{R}, dx^2))$  ; si  $X$



est orientable, il s'agit d'une structure de translation puisque  $\nu$  est globale. La structure riemannienne transverse à  $\mathcal{K}$  est invariante par  $\text{Is}^\pm(X, K)$  qui préserve  $i_K\nu$  au signe près.

Si  $X$  est simplement connexe, la forme  $i_K\nu$  est définie sur  $X$  et exacte. Soit  $x \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$  une primitive de  $i_K\nu$  et soit  $\Sigma$  l'ensemble des zéros de  $K$  ; rappelons que  $\Sigma$  est discret, preuve de la proposition 2.20. L'application  $x|_{X \setminus \Sigma}$  est alors une submersion et ses sections locales définissent une structure de variété sur l'espace des feuilles  $\mathcal{E}_{(X, K)}$ , et même une structure de translation. L'application de  $\mathcal{E}_{(X, K)}$  dans  $\mathbf{R}$  induite par  $x$  est évidemment une isométrie locale puisque la métrique riemannienne de  $\mathcal{E}_{(X, K)}$  est donnée par  $(i_K\nu)^2 = dx^2$ .  $\square$

*Remarque 2.22.* L'assertion (2) est valable plus généralement si  $X$  est orientable – et connexe – avec  $i_K\nu$  exacte. L'application  $x \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$  est alors bien définie modulo translation (choix de la primitive) et changement de signe (choix de  $\nu$ ) ; nous l'appellerons « coordonnée transverse » au champ. À translation et signe près, elle coïncide avec la coordonnée  $x$  de toute carte adaptée (1).

**PROPOSITION 2.23** (structures riemanniennes transverses aux feuilletages de lumière). *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne saturée (avec ou sans bord) dont le champ ne s'annule pas. Alors tout feuilletage de lumière  $\mathcal{L}$  transverse à  $K$  (s'il en existe) admet une métrique riemannienne transverse invariante par le groupe  $\text{Is}^\pm(X, K)$ . Si  $\Phi^t$  désigne le flot de  $K$ , cette métrique transverse est donnée par  $dt^2$ .*

*Preuve.* Localement, il existe un champ  $L$  tel que  $\langle L, L \rangle = 0$  et  $\langle L, K \rangle = 1$ , et une forme volume lorentzienne  $\nu$ , normalisée par  $\nu(K, L) = 1$ . On voit que  $L$  est invariant par  $K$ , c'est-à-dire vérifie  $[K, L] = 0$ , puis que la forme  $i_L\nu$  est fermée. L'intégration de  $i_L\nu$  sur les transversales à  $\mathcal{L}$  définit une structure riemannienne transverse. Tout élément de  $\text{Is}^\pm(X, K)$  préserve  $L$  et  $\nu$  au signe près, donc préserve la structure riemannienne transverse à  $\mathcal{L}$ . Dans une carte adaptée de la forme (1), on a  $\nu = -dx \wedge dy$  et  $i_L\nu = -dy$ , d'où la dernière assertion.  $\square$

**PROPOSITION 2.24** (structure affine transverse sur le feuilletage orthogonal). *Soit  $(U, K)$  un domino lorentzien (voir définition 2.2). On suppose que l'unique feuille de lumière de  $K$  est géodésiquement incomplète. Alors le feuilletage orthogonal à  $K$  admet une structure affine transverse invariante par l'action du flot de  $K$ . Cette structure est unique.*

*Preuve.* Le point important est l'invariance. Soit  $L$  l'unique champ de vecteurs sur  $U$  vérifiant  $\langle K, L \rangle = 1$  et  $\langle L, L \rangle = 0$  (dans une carte adaptée  $L = \partial_x$ ) et soit  $\omega$  la 1-forme sur  $U$  donnée par  $\omega = \langle K, \cdot \rangle$ . L'unique feuille de lumière de  $K$ , que l'on notera  $c_0$ , n'étant pas géodésiquement complète, on a  $\lambda = L \cdot \langle K, K \rangle \neq 0$  sur  $c_0$ . Cela provient de l'existence de coordonnées adaptées et du lemme suivant, dont la preuve immédiate est laissée au lecteur.

**LEMME 2.25.** *Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant 0 et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction lisse s'annulant en 0. Considérons la métrique  $2dx dy + f(x)dy^2$  définie pour  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$ . La droite  $\{x = 0\}$  est géodésiquement complète si et seulement si  $f'(0) = 0$ . Si  $f'(0) > 0$  alors cette droite porte une géodésique semi-complète, le bout complet étant du côté  $y < 0$ .*

Comme  $U$  est simplement connexe, toute structure affine transverse sur le feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$  est donnée par une submersion  $\xi : U \rightarrow \mathbf{R}$  (que l'on prend comme paramètre transverse) vérifiant  $d\xi = F\omega$  pour une certaine fonction lisse  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  ne s'annulant pas. On peut toujours supposer que  $\xi = 0$  correspond à  $c_0$ . L'invariance par le flot de  $K$  implique alors l'existence d'un réel  $\mu$  tel que  $K \cdot \xi = \mu\xi$ . Par suite, vu que  $\mathcal{L}_K\omega = 0$ , on a  $K \cdot F = \mu F$  et la condition  $d(F\omega) = 0$  s'écrit, en évaluant sur le couple  $(K, L)$  :

$$\langle K, K \rangle L \cdot F + (L \cdot \langle K, K \rangle - \mu)F = 0.$$

Puisque  $F$  ne s'annule pas, on a nécessairement  $\mu = \lambda$ . En coordonnées  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$  adaptées, sachant que  $K = \partial_y$  et  $L = \partial_x$ , on voit que la fonction  $F$  doit être de la forme

$$F = \varphi(x) \exp(\lambda y) \quad (x, y) \in I \times \mathbf{R}, \quad (4)$$

où  $\varphi$  est une solution non nulle sur  $I$  de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) + \frac{1}{f(x)}(f'(x) - \lambda)\varphi(x) = 0 \quad (x \in I). \quad (5)$$

La linéarité de cette équation assure l'existence de  $F$  et la submersion  $\xi$ , normalisée par  $\xi = 0$  sur  $c_0$ , est finalement donnée par

$$\xi = \frac{F}{\lambda} \langle K, K \rangle. \quad (6)$$

Elle est unique à homothétie près. □

*Remarques 2.26.* (1) Dans chaque demi-espace  $U^\pm$  (voir remarque 2.4), toute orbite de  $K$  est une transversale globale à  $\mathcal{K}^\perp$  sur laquelle le paramètre affine  $\xi$  est proportionnel à  $\exp(\lambda t)$ , où  $t$  désigne le temps du flot de  $K$  (voir les équations (4) et (6)).

(2) Il en résulte que si l'on prend  $F > 0$ , alors  $\xi$  décrit  $]0, \infty[$  sur  $U^+$  et  $] -\infty, 0[$  sur  $U^-$ .

Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne saturée par un champ  $K$  sans zéros. On dira que les feuilles de lumière de  $K$  *découpent des bandes* si les composantes connexes de leur complémentaire dans  $X$  sont toutes simplement connexes et si l'adhérence dans  $X$  d'une telle composante connexe est une *bande* au sens de la définition 2.2. Dans une bande de type Reeb (type III du lemme 2.8), les deux feuilles du bord n'appartiennent pas au même feuilletage de lumière. *Il n'y a donc pas d'accumulation de bandes de type Reeb dans la surface.*

**PROPOSITION 2.27** (structure projective transverse sur le feuilletage orthogonal). *Soit  $X$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$  complet et sans zéros. On suppose que les feuilles de lumière de  $K$  sont géodésiquement incomplètes et qu'elles découpent  $X$  en bandes de type Reeb. Alors le feuilletage orthogonal au champ  $K$  admet une structure projective transverse invariante par l'action du flot de  $K$ . Cette structure est unique.*

*Preuve.* Comme les feuilles de lumière de  $K$  sont géodésiquement incomplètes, il découle du lemme 2.25 qu'elles sont toutes isolées. Soit  $\mathcal{K}_0$  l'ensemble de ces feuilles et soit  $X_0$  leur réunion. Pour chaque feuille de lumière  $c \in \mathcal{K}_0$ , la réunion de  $c$  et des deux composantes de  $X \setminus X_0$  adhérentes à  $c$  définit un voisinage ouvert  $U_c$  de  $c$  qui est un domino (au sens de la définition 2.2) maximal. On note  $\lambda_c$  la valeur de  $L \cdot \langle K, K \rangle$  sur  $c$ , réel non nul bien défini. Considérons deux ouverts  $U_c$  et  $U_d$  ( $c, d \in \mathcal{K}_0$ ) contigus, munis de cartes adaptées. Avec les notations précédentes, on a  $U_c \cap U_d = U_c^\epsilon = U_d^{-\epsilon}$  ( $\epsilon = 1$  ou  $-1$ ) grâce au type Reeb et à la maximalité. De plus, les champs  $L$  induits sur  $U_c \cap U_d$  par  $U_c$  et  $U_d$  sont distincts :  $\partial_x$  et  $-\partial_x + (2/f(x))\partial_y$  (dans une carte adaptée). Le changement  $\theta : I_c^\epsilon \times \mathbf{R} \rightarrow I_d^{-\epsilon} \times \mathbf{R}$  de coordonnées adaptées doit échanger les champ verticaux (qui correspondent à  $K$ ) et les deux champs  $L$  précédents. On trouve ainsi que  $-\theta$  correspond nécessairement à l'une des réflexions de  $U_c^\epsilon$ , c'est-à-dire

$$-\theta(x, y) = \left(x, \frac{2}{\lambda} \ln \frac{\lambda \xi_0}{f(x)\varphi(x)} - y\right) \quad (x, y) \in I_c^\epsilon \times \mathbf{R}, \quad (7)$$

où  $\xi_0$  est le paramètre de la géodésique fixe par la réflexion (voir (6)). En particulier on doit avoir  $\lambda_c + \lambda_d = 0$  et  $I_d^{-\epsilon} = I_c^\epsilon$ .

Pour comparer les structures affines transverses induites par  $U_c$  et  $U_d$  sur le feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$ , on prend une feuille arbitraire de  $K$  dans  $U_c \cap U_d$ , qui fournit une transversale globale au feuilletage  $\mathcal{K}^\perp$  sur  $U_c \cap U_d$ . Sur une telle transversale, les paramètres affines  $\xi_c$  et  $\xi_d$  induits par  $U_c$  et  $U_d$  sont proportionnels à  $\exp(\lambda_c t)$  et  $\exp(\lambda_d t)$  respectivement,  $t$  étant le temps du flot de  $K$  (voir remarque 2.26). Le produit  $\xi_c \xi_d$  est constant puisque  $\lambda_c + \lambda_d = 0$ . Les différentes structures affines s'assemblent donc bien en une structure projective.

Considérons  $\zeta$  une autre structure projective transverse à  $\mathcal{K}^\perp$  et invariante par le flot  $\Phi^t$  de  $K$ . Soit  $U$  un ouvert (maximal) de carte adaptée et soit  $\tau$  une transversale globale à  $\mathcal{K}^\perp$  dans  $U$ . On a une carte projective  $\tau$  à valeurs dans un ouvert connexe  $J$  de la droite projective. Pour  $t \neq 0$ , l'action de  $\Phi^t$  induit une bijection projective directe de  $J$  dans  $J$  ayant un unique point fixe (la feuille de lumière de  $K$  dans  $U$ ). Quitte à composer la carte projective, on peut ainsi supposer que  $J = \mathbf{R}$  et que  $\Phi^t$  induit une homothétie de rapport  $\neq 1$ . La structure induite  $\zeta|U$  contient donc la structure affine (unique) de la proposition 2.24. Mais la structure projective construite ci-dessus est engendrée par l'atlas des structures affines sur les ouverts de cartes adaptées, d'où l'unicité.  $\square$

*Exemple 2.28 (cylindres).* Soit  $(U, K, c_0)$  un domino lorentzien avec  $c_0$  géodésiquement incomplète et soit  $\sigma^\pm$  une réflexion de chaque demi-espace ouvert  $U^\pm$ . On considère deux copies de  $U$  avec des champs opposés :  $(U_i, K_i)$  avec  $U_i = U$  et  $K_i = (-1)^i K$  ( $i = 0, 1$ ). Cela étant, soit  $C$  la surface obtenue en identifiant  $U_0^+$  et  $U_1^+$  (resp.  $U_0^-$  et  $U_1^-$ ) avec  $\sigma^+$  (resp. avec  $\sigma^-$ ). Cette surface étend  $(U, K)$  et elle est clairement homéomorphe au cylindre  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ , les fibres  $\{x\} \times \mathbf{R}$  ( $x \in \mathbf{S}^1$ ) correspondant au feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$  (dont deux feuilles sont de lumière). Ainsi l'espace des feuilles de  $\mathcal{K}^\perp$  sur  $C$  est un cercle recouvert par deux cartes affines. Fixons un paramètre affine  $\xi$  pour  $\mathcal{K}^\perp$  sur  $U$ , et notons  $\xi_0^\pm$  le paramètre de l'axe de la réflexion  $\sigma^\pm$ . Dans  $U^\pm$ , en prenant une orbite de  $K$  comme transversale, on voit que l'action de  $\sigma^\pm$  sur  $\mathcal{K}^\perp$  est donnée par  $\xi\xi' = (\xi_0^\pm)^2$  (remarque 2.26). Par suite l'holonomie de la structure projective transverse à  $\mathcal{K}^\perp$  est l'homothétie de rapport  $(\xi_0^+/\xi_0^-)^2$  sur la droite projective – les feuilles de lumière de  $K$  correspondent à 0 et  $\infty$ . Ce réel caractérise  $C$  à isométrie près.

## 2.3 Adjonction de selles

Nous nous intéressons maintenant à la L-complétude, et en premier lieu à la complétude géodésique des feuilles de lumière d'un champ de Killing  $K$  (complet). Une telle feuille  $c_0$  est géodésiquement incomplète si et seulement si  $\nabla_K K \neq 0$  sur  $c_0$  (voir lemme 2.25). Les feuilles de lumière des champs de Killing sont donc génériquement incomplètes. Pour lever cette obstruction, nous allons montrer que nos extensions peuvent être complétées « par adjonction de selles » (voir proposition 2.32).

**PROPOSITION 2.29** (extension par une selle symétrique). *Soit  $(U, K)$  un domino lorentzien dont l'unique feuille de lumière de  $K$  est géodésiquement incomplète. La surface  $(U, K)$  admet alors une extension simplement connexe saturée  $(\widehat{U}_s, \widehat{K})$  dont le champ  $\widehat{K}$  possède un unique zéro  $p \in \widehat{U}_s$  et dont la métrique est symétrique par rapport à  $p$ . Cette extension est partagée en 4 quadrants ouverts séparés par deux géodésiques de lumière complètes passant par  $p$ ; chaque demi-plan ouvert est isométrique à  $U$ .*

*Preuve.* En coordonnées adaptées  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$ , la métrique est donnée par (1) avec  $\lambda = f'(0) \neq 0$ . Soit  $\varphi$  une solution non nulle et positive (sur  $I$ ) de l'équation différentielle linéaire (5). La fonction  $f$  s'écrit  $f(x) = \lambda x g(x)$  ( $x \in I$ ) avec  $g \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$  vérifiant  $g > 0$

et  $g(0) = 1$ . Considérons les changements de coordonnées réciproques

$$\begin{cases} u = x[\varphi(x)g(x)]^{1/2} \exp(\frac{\lambda y}{2}) \\ v = [\varphi(x)g(x)]^{-1/2} \exp(-\frac{\lambda y}{2}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = uv \\ y = -\frac{1}{\lambda} \ln[v^2 \varphi(uv)g(uv)] \end{cases} \quad (8)$$

avec  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$  et  $(uv, v) \in I \times ]0, \infty[$ . Dans les coordonnées  $(u, v)$ , la métrique de  $U$  prend la forme

$$\frac{1}{\lambda} [v^2 h(uv) du^2 - 2(g(uv) + \frac{1}{g(uv)}) dudv + u^2 h(uv) dv^2] \quad (uv \in I, v > 0), \quad (9)$$

avec  $h(x) = \frac{1}{x}(g(x) - \frac{1}{g(x)})$  ( $x \in I$ ) et le champ  $K$  correspond à  $\frac{2}{\lambda}(u\partial_u - v\partial_v)$ . La métrique et le champ sont clairement définis pour tout  $v \in \mathbf{R}$  et sont invariants par la symétrie centrée à l'origine, d'où le prolongement cherché.  $\square$

Nous appellerons *selle* (voir définition 2.30) l'extension  $(\widehat{U}_s, \widehat{K})$  que nous venons de construire. La proposition 2.29 signifie que la surface  $(U, K)$  peut toujours être réalisée comme « moitié ouverte » d'une selle, que l'on peut choisir symétrique. Une extension par selle symétrique dont une moitié ouverte est isométrique à  $(U, K)$  sera dite *minimale*. Nous examinerons l'unicité d'une telle extension au §2.4.

Observons maintenant que le revêtement universel  $\widehat{U}_u$  de  $\widehat{U}_s \setminus \{p\}$  est isométrique au revêtement universel des cylindres  $C$  de l'exemple 2.28 – lequel admet un domaine fondamental ouvert isométrique à  $U$ . Par conséquent, l'un des quotients de  $\widehat{U}_u$  se complète en la selle  $\widehat{U}_s$  par l'adjonction d'un zéro du champ. Dans ce qui suit, nous établissons un critère de complétion qui permet notamment de déterminer le cylindre  $C$  dont le revêtement double se complète en une selle  $\widehat{U}_s$  (exemple 2.33).

**DÉFINITION 2.30.** Soit  $X$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$  complet. On dit que  $(X, K)$  est

- (1) une *selle* si  $X$  est simplement connexe et si  $K$  admet un unique zéro, appelé *point selle*,
- (2) une *pseudo-selle* si  $X$  est homéomorphe au cylindre, et si  $K$  ne s'annule pas et possède exactement 4 feuilles de lumière découpant  $X$  en 4 bandes de type Reeb,
- (3) une *quasi-selle* si  $X$  est une pseudo-selle et si les 4 feuilles de lumière du champ  $K$  sont *géodésiquement incomplètes*.

*Remarque 2.31.* Comme les réflexions d'une bande de type Reeb s'étendent au bord (remarque 2.18), les 4 feuilles de lumière du champ d'une pseudo-selle sont de même nature, géodésiquement complètes ou non. Elles peuvent être géodésiquement complètes. Par exemple, la métrique  $2dudv(u^2 + v^2)^{-3/2}$  sur  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ , invariante par le champ  $u^3\partial_u - v^3\partial_v$ , est une pseudo-selle mais pas une quasi-selle.

D'après la proposition 2.27, le feuilletage orthogonal au champ d'une quasi-selle admet une structure projective transverse invariante.

**PROPOSITION 2.32** (complétion d'une quasi-selle). *Une quasi-selle se complète en une selle (par l'adjonction d'un zéro du champ) si et seulement si l'holonomie de la structure projective transverse du feuilletage orthogonal au champ vaut l'identité.*

*Preuve.* Soit  $X$  une quasi-selle et soit  $\mathcal{K}^\perp$  le feuilletage orthogonal au champ de Killing  $K$ . On peut recouvrir  $X$  par 4 ouverts maximaux  $U_i$  ( $i$  entier modulo 4) munis de cartes adaptées. On suppose que  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$  ( $i$  modulo 4). L'holonomie de la structure projective

transverse à  $\mathcal{K}^\perp$  provient de l'ambiguïté de la coordonnée verticale  $y$  des cartes adaptées : quand on « développe » celles-ci autour de la singularité, les feuilles de  $K$  restent fixes mais il se produit un décalage de la coordonnée  $y$ , c'est-à-dire du temps du flot de  $K$ . Soit  $\xi_i$  un paramètre affine définissant  $\mathcal{K}^\perp$  dans  $U_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Sur  $U_i \cap U_{i+1}$ , les changements de paramètres affines sont donnés par  $\xi_{i+1}\xi_i = \xi_{i+1}(\gamma_i)\xi_i(\gamma_i)$  sur  $U_i \cap U_{i+1}$ ,  $\gamma_i$  étant une feuille (arbitraire) de  $\mathcal{K}^\perp|_{U_i \cap U_{i+1}}$  ( $i$  modulo 4). Le développement des cartes adaptées induit sur l'ouvert  $U_5 = U_1$  d'un paramètre affine  $\xi_5$  et l'holonomie s'écrit

$$\xi_5 = \eta\xi_1 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\xi_1(\gamma_1)\xi_2(\gamma_1)\xi_3(\gamma_3)\xi_4(\gamma_3)}{\xi_1(\gamma_4)\xi_2(\gamma_2)\xi_3(\gamma_2)\xi_4(\gamma_4)}. \quad (10)$$

De plus, le décalage de la coordonnée verticale est donné par  $y' = y + \frac{1}{\lambda} \ln \eta$  (voir (4)). La formule (10) laisse clairement apparaître l'indépendance de l'holonomie par rapport aux choix des paramètres affines. On peut ainsi modifier  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  et  $\xi_4$  pour avoir  $\xi_{i+1}\xi_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et  $\eta^{-1} = \xi_1(\gamma_4)\xi_4(\gamma_4) = \xi_1\xi_4$ .

Soit  $X$  une selle. Dans la carte exponentielle (12) de coordonnées  $(u, v)$  centrée au point selle, la métrique est invariante par le champ  $u\partial_u - v\partial_v$  et définie sur un voisinage saturé de l'origine. Le feuilletage  $\mathcal{K}^\perp$  correspond aux droites issues de l'origine, voir §2.4. La structure projective transverse est donc la structure usuelle sur le cercle, vu comme revêtement double de la droite projective. Son holonomie est évidemment triviale.

Inversement, considérons une quasi-selle  $X$  dont l'holonomie est triviale. Avec les notations ci-dessus, chaque ouvert  $U_i$  admet une carte de la forme (9) dont l'image est une « demi-selle ». D'après ce qui précède, on peut choisir des paramètres affines  $\xi_i$  tels que  $\xi_{i+1}\xi_i = 1$  pour tout  $i$  modulo 4. Cela permet d'assembler les 4 cartes en une carte globale de  $X$  à valeurs dans le plan  $(u, v)$ . Plus précisément, chaque  $U_i$  admet des coordonnées adaptée  $(x_i, y_i) \in I_i \times \mathbf{R}$ , où la feuille de lumière de  $K$  correspond à  $x_i = 0$ . On choisit  $\xi_1$  tel que  $\xi_1/x_1 < 0$  sur  $U_1$ ; comme  $\xi_{i+1}\xi_i > 0$ , on a  $(-1)^i \xi_i/x_i > 0$  pour tout  $i$  modulo 4. Si l'on pose comme dans (8)

$$u_i = x_i \sqrt{(-1)^i \xi_i/x_i}, \quad \text{et} \quad v_i = \sqrt{(-1)^i x_i/\xi_i},$$

la condition  $\xi_{i+1}\xi_i = 1$  entraîne  $(u_{i+1}, v_{i+1}) = (v_i, -u_i)$  sur  $U_i \cap U_{i+1}$  (sur cet ouvert, on a  $x_{i+1} = -x_i > 0$ ). À partir de la relation  $(\xi_i)'_{y_i} = (-1)^i \lambda \xi_i$ , on voit également que le champ  $K$  s'écrit  $(-1)^i \frac{\lambda}{2} (u_i \partial_{u_i} - v_i \partial_{v_i})$  en coordonnées  $(u_i, v_i)$ . On obtient ainsi une carte globale de  $X$  à valeurs dans le plan  $(u, v) = (u_1, v_1)$ . La métrique est définie sur un voisinage de 0 de la forme  $a_0 < uv < b_0$ , excepté en 0, et elle est invariante par le champ  $u\partial_u - v\partial_v$ . Une telle métrique se prolonge automatiquement à l'origine, proposition 2.34. En développant de cette façon une quasi-selle d'holonomie quelconque  $\eta$ , on obtient sur  $U_5 = U_1$  des coordonnées  $(u_5, v_5)$  et  $(u_1, v_1)$  telles que  $(u_5, v_5) = (u_1/\sqrt{\eta}, \sqrt{\eta}v_1)$ , et on retrouve le décalage du flot (le champ  $K$  s'écrit  $-\frac{\lambda}{2}(u_1\partial_{u_1} - v_1\partial_{v_1})$  dans  $U_1$ ).  $\square$

*Exemple 2.33* (cylindres, suite). Le cylindre  $C$  de l'exemple 2.28, défini par deux réflexions d'axes  $\xi_0^\pm$ , admet un revêtement double qui est une quasi-selle. Celle-ci se complète en une selle (symétrique) si et seulement si  $|\xi_0^+| = |\xi_0^-|$ .

## 2.4 Unicité des selles

**PROPOSITION 2.34.** *Soit  $\Omega^* = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}; uv \in I\}$ , où  $I \subset \mathbf{R}$  est un intervalle ouvert contenant 0. Toute métrique lorentzienne  $g$  lisse (resp. analytique) sur  $\Omega^*$  et invariante par le champ  $K = u\partial_u - v\partial_v$  est de la forme*

$$g = v^2 \alpha du^2 + 2\beta dudv + u^2 \gamma dv^2, \quad (11)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des fonctions lisses (resp. analytiques) sur  $\Omega^*$  et constantes le long du flot de  $K$ . De plus  $g$  se prolonge à l'origine en une métrique lisse (resp. analytique). Dans le cas analytique, les fonctions  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ne dépendent que du produit  $uv \in I$  et la métrique est symétrique par rapport à l'origine.

*Preuve.* Posons  $g = a du^2 + 2b dudv + c dv^2$ . La relation  $\mathcal{L}_K g = 0$  se traduit par  $K \cdot b = 0$ ,  $K \cdot a = -2a$  et  $K \cdot c = 2c$ . Par suite  $b, v^{-2}a$  ( $v \neq 0$ ) et  $u^{-2}c$  ( $u \neq 0$ ) sont invariantes par  $K$ . Sur chaque demi-plan ouvert  $\pm u > 0, \pm v > 0$ , toute fonction invariante par  $K$  est fonction lisse (resp. analytique) du produit  $uv$  (par exemple sur  $v > 0$ , on pose  $x = uv, y = -\ln v$  et le champ correspond à  $\partial_x$ ). Il existe donc deux fonctions  $\varphi^\pm \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telles que

$$a(u, v) = v^2 \varphi^+(uv) \quad (v > 0) \quad \text{et} \quad a(u, v) = v^2 \varphi^-(uv) \quad (v < 0).$$

L'examen du développement de Taylor de  $a(u_0, v)$  en  $v = 0$  ( $u_0 \neq 0$  fixé) montre que  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  ont le même jet d'ordre infini en 0. En posant  $\alpha(u, v) = \varphi^\pm(uv)$  pour  $\pm v > 0$  et  $\alpha(u, 0) = \varphi(0)$ , on définit donc par recollement une fonction  $\alpha$  invariante et lisse (resp. analytique) sur  $\Omega^* \cup \{0\}$ , telle que  $a = v^2 \alpha$  sur  $\Omega^*$ . Dans le cas analytique on a  $\varphi^+ = \varphi^-$ ; la fonction  $\alpha$  ne dépend que du produit  $uv$  et elle est invariante par la symétrie centrée à l'origine. On vérifierait de même que les coefficients  $b$  et  $c$  sont de la forme voulue et se prolongent à l'origine. De plus  $ac - b^2$  est constant sur  $uv = 0$ , donc non nul à l'origine.  $\square$

**PROPOSITION 2.35** (carte exponentielle). *Soit  $X$  une surface lorentzienne lisse (resp. analytique) possédant un champ de Killing non trivial et complet  $K$  s'annulant en un point  $p$ . Il existe  $\rho > 0$  et une carte exponentielle centrée en  $p$ , définie sur  $\Omega_\rho = \{|uv| < \rho\}$ , dans laquelle la métrique s'écrit*

$$g = 2dudv + \alpha(udv - vdu)^2 \quad (|uv| < \rho), \quad (12)$$

où  $\alpha : \Omega_\rho \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction lisse (resp. analytique) constante le long du flot de  $u\partial_u - v\partial_v$ . La métrique est déterminée au voisinage du point  $p$  par la fonction  $\langle K, K \rangle$ .

*Preuve.* L'application exponentielle en  $p$  est une semi-conjugaison entre le flot de  $K$  et celui de sa partie linéaire  $K_0$ . Cela entraîne que  $p$  est un point selle du champ. On peut choisir des coordonnées  $(u, v)$  du plan tangent en  $p$  de sorte que la métrique à l'origine s'écrive  $g_0 = 2dudv$ . On a alors  $K_0 = C(u\partial_u - v\partial_v)$  ( $C \neq 0$  constante). L'exponentielle est un difféomorphisme local près de l'origine, donc sur un voisinage saturé par  $K_0$ , de la forme  $\Omega_\rho$ ; l'injectivité sur  $\Omega_\rho$  se déduit du lemme de Clairaut et Noether : les rayons géodésiques issus de  $p$  étant orthogonaux à  $K$ , il ne peuvent se recouper qu'en un zéro de  $K$ .

Comparons maintenant l'expression  $g$  de la métrique en coordonnées  $(u, v)$  avec  $g_0$ . Comme la carte est exponentielle, le champ radial est orthogonal à  $K_0$  pour  $g$  et  $g_0$ , et de même norme pour ces deux métriques. De plus ce champ engendre le noyau de la forme  $\omega_0 = udv - vdu$ . Par conséquent, en dehors des axes  $uv = 0$ , le tenseur  $g - g_0$  est de rang au plus 1 et proportionnel à  $\omega_0^2$  (en tant que forme quadratique). Puisque cette condition est fermée, il existe par continuité une fonction  $\alpha$  définie sur  $\Omega_\rho$  et vérifiant (12). En évaluant localement sur un champ de vecteurs qui n'annule pas  $\omega_0$ , on voit que  $\alpha$  est lisse (resp. analytique). De plus  $\alpha$  est invariante par  $K_0$  car toutes les autres quantités de (12) le sont. Enfin, si  $N$  désigne l'expression de  $\langle K, K \rangle$  dans notre carte, la fonction  $\alpha$  est déterminée par la relation

$$4C^2 u^2 v^2 \alpha(u, v) = N(u, v) + 2C^2 uv \quad (|uv| < \rho).$$

$\square$



*Remarque 2.36.* Dans chaque composante du complément du cône isotrope en  $p$  on choisit arbitrairement un rayon géodésique  $r_i$  issu de  $p$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). L'étude des fonctions invariantes par  $u\partial_u - v\partial_v$  (preuve de la proposition 2.34) montre que la donnée de  $\langle K, K \rangle$  comme fonction de la longueur d'arc sur  $r_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) suffit à déterminer la métrique. Les germes de selles lisses sont donc paramétrés par des quadruplets de germes lisses  $f_i : [0, \delta[ \rightarrow \mathbf{R}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) ayant le même jet infini en 0. Dans le cas analytique, les germes de selles sont paramétrés par des germes de fonctions analytiques en  $0 \in \mathbf{R}$ .

**PROPOSITION 2.37** (unicité de l'extension par selle symétrique). *Soit  $(U, K)$  un domino lorentzien dont l'unique feuille de lumière de  $K$  est géodésiquement incomplète. L'extension de  $(U, K)$  par une selle symétrique minimale (proposition 2.29) est unique à isométrie près.*

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.35 car l'extension est symétrique (voir également la remarque 2.36).  $\square$

On remarquera que dans le cas lisse, la surface  $(U, K)$  admet une infinité d'extensions par des selles non symétriques, dont les germes au point selle sont paramétrés par un couple de germes de fonctions  $[0, \delta[ \rightarrow \mathbf{R}$ . Dans le cas analytique, le germe au point selle de l'extension est unique à isométrie près. La surface  $(U, K)$  admet également une infinité d'extensions par des quasi-selles symétriques, exemple 2.33. Elles s'obtiennent à partir de la selle symétrique  $(\widehat{U}_s, \widehat{K})$  par découpage et recollement avec un décalage non nul le long d'une feuille de lumière de  $\widehat{K}$ . On sait qu'une telle métrique n'est pas isométrique à  $\widehat{U}_s \setminus \{p\}$  et ne se prolonge jamais en  $p$ , voir §2.3. Ce phénomène est cohérent avec l'unicité de la proposition 2.35.

**PROPOSITION 2.38.** *Soient  $(X_1, K_1)$  et  $(X_2, K_2)$  deux selles symétriques de points selles  $p_1$  et  $p_2$ . Toute isométrie d'une demi-selle (ouverte) de  $X_1$  dans une demi-selle de  $X_2$  s'étend de façon unique en une isométrie entre  $X_1$  et  $X_2$ . Toute isométrie de  $X_1 \setminus \{p_1\}$  dans  $X_2 \setminus \{p_2\}$  s'étend de façon unique en une isométrie entre  $X_1$  et  $X_2$ .*

*Preuve.* Dans les deux cas, les selles  $X_1$  et  $X_2$  sont isométriques d'après la proposition 2.37. On peut donc supposer que  $X_1 = X_2$ . De plus, il est bien connu que l'extension cherchée, si elle existe, est unique. Soit  $(U, K)$  une demi-selle de  $X$ . Si  $U$  est à courbure constante non nulle alors elle contient des géodésiques de lumière maximale qui ne sont semi-complètes ni dans un sens ni dans l'autre, ce qui entraîne qu'elle ne contient pas de domaine de de Sitter. Si  $U$  contient un demi-plan de Minkowski alors  $X$  est égal au plan de Minkowski et l'énoncé est vérifié. Ainsi, grâce au lemme 2.1, on peut supposer que toute isométrie  $\Phi$  de  $U$  envoie  $K$  sur  $\pm K$ . Alors  $\Phi$  préserve l'unique feuille de lumière de  $K$  sur  $U$ . Quitte à composer par le flot de  $K$  on peut donc supposer que  $\Phi$  fixe un point sur cette feuille. Sa différentielle en ce point ne peut être que  $\pm \text{Id}$ . Si  $d\Phi = -\text{Id}$  alors  $\Phi$  échange  $U^+$  et  $U^-$ , ce qui est impossible vu que  $\langle K, K \rangle$  change de signe. Par conséquent  $d\Phi = \text{Id}$  et donc  $\Phi = \text{Id}$ .

Les réflexions génériques des bandes d'une selle symétrique s'étendent à toute la selle. En coordonnées normales, il s'agit des applications  $\sigma(u, v) = \pm(v, u)$  et de leurs conjuguées par le flot de  $K$ . Si  $\Psi$  est une isométrie de  $X \setminus \{p\}$ , on peut donc supposer que  $\Psi$  préserve une demi-selle et refaire le raisonnement ci-dessus.  $\square$

### 3 Extensions maximales

#### 3.1 Construction de surfaces maximales

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbf{R}$  et soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$  (resp.  $f \in \mathcal{C}^\omega(I, \mathbf{R})$ ). On appelle *ruban associé à  $f$* , noté  $R_f = (\mathbf{R}, k)$ , la surface  $\mathbf{R} = I \times \mathbf{R}$  munie de la métrique et du champ définis par

$$2dx dy + f(x)dy^2 \quad \text{et} \quad k = \partial_y \quad (x, y) \in \mathbf{R} = I \times \mathbf{R}. \quad (13)$$

On dira que  $f$  est *inextensible* si elle ne se prolonge pas (avec la même régularité, lisse ou analytique) à un intervalle ouvert contenant strictement  $I$ . Enfin, on note  $f^\vee$  la fonction « miroir » de  $f$ , définie pour  $-x \in I$  par  $f^\vee(x) = f(-x)$ .

La notion de maximalité introduite à la définition 2.9 est spécifique aux surfaces munies d'un champ de Killing. Il convient de la comparer à la notion usuelle. Les surfaces à bord n'étant jamais maximales au sens usuel ni au sens de la définition 2.9 (exemple 2.10), nous supposons dans cette discussion que les surfaces sont sans bord.

**PROPOSITION 3.1.** *Une surface lorentzienne saturée  $(X, K)$  est maximale (parmi les surfaces munies d'un champ de Killing complet) si et seulement si la surface  $X$  est maximale au sens usuel.*

*Preuve.* Soit  $X'$  une surface lorentzienne (sans bord) et soit  $X$  un ouvert propre de  $X'$  muni d'un champ de Killing complet  $K$ . Il faut établir que  $(X, K)$  admet une extension propre saturée  $(X'', K'')$ . Comme deux points arbitraires de  $X'$  sont toujours reliés par une géodésique de lumière brisée, il existe une feuille de lumière  $\ell'$  de  $X'$  qui rencontre  $X$  et  $X' \setminus X$ . Supposons dans un premier temps que  $\ell' \cap X$  possède une composante  $\ell$  transverse à  $K$ . Grâce à cette hypothèse de transversalité, la feuille  $\ell'$  admet un paramétrage géodésique  $\gamma : J \rightarrow X'$ , avec  $J$  intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , tel que  $\langle K, \gamma'(x) \rangle = 1$  sur  $\ell$  et cette composante  $\ell$  est contenue dans une carte adaptée  $U$  de la forme (13). La fonction courbure au point  $\gamma(x)$ ,  $x \in J$ , vaut  $f''(x)/2$  sur  $\ell$ . Par suite la fonction  $f$  s'étend en une fonction  $g$  définie sur  $J$ . On définit une extension propre  $(X'', K'')$  de  $(X, K)$  en lui recollant  $R_g$  le long de  $U$ .

On peut désormais supposer que pour toute feuille de lumière  $\ell'$  de  $X'$  rencontrant  $X$  et  $X' \setminus X$ , les composantes de  $\ell' \cap X$  sont des orbites de lumière du champ  $K$ , nécessairement semi-complètes géodésiquement et isolées (lemme 2.25); par suite  $\ell' \cap X$  admet au plus deux composantes et toute feuille de lumière de  $X'$  voisine de  $\ell'$  est entièrement contenue dans  $X$ . Fixons une telle feuille de lumière  $\ell'_0$ . L'intersection  $F = \ell'_0 \cap (X' \setminus X)$  est un intervalle fermé non vide de  $\ell'_0$ . L'existence d'un point  $q$  intérieur à  $F$  dans  $\ell'_0$  est exclue par ce qui précède (considérer la deuxième feuille de lumière de  $X'$  passant par  $q$ ). Finalement  $F$  se réduit à un point  $p \in X'$  isolé dans  $\partial X$ . Il reste à montrer que le champ  $K$  se prolonge au point  $p$  en un champ de Killing.

Il existe une carte centrée en  $p$  de coordonnées  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$  dans laquelle les feuilletages de lumière de  $X'$  au voisinage de  $p$  sont donnés par  $u = \text{cte}$  et  $v = \text{cte}$ . Le flot local de  $K$  dans cette carte préserve les feuilletages de lumière. Son expression est donc de la forme  $(\phi^t(u), \psi^t(v))$ , où  $\phi^t$  et  $\psi^t$  sont les flots locaux de champs de vecteurs lisses  $\alpha(u)\partial_u$  et  $\beta(v)\partial_v$  définis sur  $\mathbf{R}$ . En particulier, le champ  $\alpha(u)\partial_u + \beta(v)\partial_v$  est défini pour  $(u, v) = (0, 0)$  et permet de prolonger  $K$  au point  $p$ . Par continuité, ce prolongement est un champ de Killing sur  $X \cup \{p\}$ .  $\square$

DÉFINITION 3.2. Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne saturée. On dit que  $(X, K)$  n'a pas de selles à l'infini si (dans le revêtement universel) toute orbite de lumière du champ est incluse dans une géodésique de lumière complète.

PROPOSITION 3.3. Pour toute fonction lisse (resp. analytique)  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  il existe une surface lorentzienne  $(E_f^u, K^u)$  lisse (resp. analytique), saturée, homéomorphe au plan  $\mathbf{R}^2$  et telle que

- (i) tout ruban maximal contenu dans  $(E_f^u, K^u)$  est isométrique à  $R_f$  ou à  $R_{f^\vee}$ ,
- (ii)  $(E_f^u, K^u)$  n'a pas de selles à l'infini.

De plus,  $E_f^u$  est maximale si et seulement si  $f$  est inextensible, et  $E_f^u$  est  $L$ -complète si et seulement si  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$ .

*Preuve.* Il convient d'observer que dès que  $f$  s'annule sans être constante,  $R_f$  ne satisfait pas la condition (i) : en effet  $R_f$  contient alors une bande ou une demi-bande, donc un ruban maximal  $R_{g^\vee}$  où  $g$  est une restriction non triviale de  $f$ . Si  $f = 0$  ou si  $f$  ne s'annule pas, on pose  $E_f^u = R_f$ , dont les rubans maximaux sont  $R_f$  (unique si  $f = 0$ ) ou  $R_f$  et  $R_{f^\vee}$ , et qui satisfait évidemment la condition (ii). Dorénavant nous supposons que la fonction  $f$  s'annule et n'est pas constante.

Soit  $Z_0 \subset I$  le lieu des zéros de  $f$  (par hypothèse non vide et distinct de  $I$ ), correspondant aux orbites de lumière du champ  $k$ . D'après le lemme 2.25, celles qui sont géodésiquement complètes sont paramétrées par  $Z_{00} = Z_0 \cap \{f' = 0\}$ . Les points de  $Z_0 \setminus Z_{00}$  seront appelés *zéros simples de  $f$*  ; s'il en existe, ils sont associés aux orbites de lumière semi-complètes et sont isolés dans  $Z_0$ . La réunion des orbites de lumière  $Z_0 \times \mathbf{R}$  découpe sur  $R = I \times \mathbf{R}$  des bandes standards de type I (adhérences dans  $R$  des composantes de  $(I \setminus Z_0) \times \mathbf{R}$ ), en nombre au plus dénombrable.

Nous construisons une première extension (non simplement connexe) en recollant des copies de  $(R, k) = R_f$  et de  $(R, -k) \simeq R_{f^\vee}$ . Soit  $A$  un groupe abélien dénombrable, suffisamment gros pour que l'on puisse indexer les composantes connexes de  $R \setminus R_0$  par une partie  $S \subset A$ , pour l'instant arbitraire. Ces composantes seront appelées « carrés ouverts », même si potentiellement deux d'entre elles – aux extrémités du ruban – pourraient être des bandes de type III ouvertes. Notons  $(C_\alpha)_{\alpha \in S}$  (resp.  $(C_\alpha^\vee)_{\alpha \in S}$ ) les carrés ouverts de  $(R, k)$  (resp. de  $(R, -k)$ ) et, pour chaque  $\alpha \in S$ , fixons une réflexion  $\sigma_\alpha$  qui échange  $C_\alpha$  et  $C_\alpha^\vee$ , champs de Killing compris. Considérons maintenant deux familles de rubans indexées par le groupe  $A$ , définies par  $H_i = (R, k)$  ( $i \in A$ ) et  $V_j = (R, -k)$  ( $j \in A$ ). Les copies respectives dans  $H_i$  et  $V_j$  des  $C_\alpha$  et  $C_\alpha^\vee$  ( $\alpha \in S$ ) sont notées  $C_{i,\alpha}^H$  et  $C_{j,\alpha}^V$ . Soit enfin  $(Y, k_Y)$  la surface lorentzienne (sans bord, munie d'un champ de Killing  $k_Y$ ) définie comme quotient de la surface  $(\coprod_{i \in A} H_i) \amalg (\coprod_{j \in A} V_j)$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  engendrée par

$$p\mathcal{R}q \text{ si } p = q \text{ ou } (p, q) \in C_{i,\alpha}^H \times C_{j,\alpha}^V, \alpha = i + j \in S \text{ et } q = \sigma_\alpha(p). \quad (14)$$

Autrement dit, les surfaces lorentziennes  $X^H = \coprod_{i \in A} H_i$  et  $X^V = \coprod_{j \in A} V_j$  sont recollées au moyen de l'isométrie partielle (involutive)  $\sigma$  définie par (14) grâce aux  $\sigma_\alpha$ . En particulier, pour tout  $(i, j) \in A^2$ , le ruban « horizontal »  $H_i$  est recollé au ruban « vertical »  $V_j$  le long d'au plus un carré  $C_\alpha$  (si  $\alpha = i + j \in S$ ) via la réflexion  $\sigma_\alpha$ . On vérifie que  $\mathcal{R}$  est une relation ouverte. La surface  $(Y, k_Y)$  contient des images isométriques des deux surfaces  $X^H$  et  $X^V$  dont les rubans maximaux, encore notées  $H_i$  ( $i \in A$ ) et  $V_j$  ( $j \in A$ ), forment un atlas dénombrable de  $Y$  ; noter que  $Y$  admet également un atlas à deux cartes de domaines  $X^H$  et  $X^V$ .

L'isométrie de recollement  $\sigma$  est définie sur  $U^H = \coprod_{i \in A} \cup_{\alpha \in S} C_{i,\alpha}^H$ . Soit  $(p_n)$  une suite de points de  $U^H$  qui converge vers  $p \in \partial U^H$ . Il existe  $i \in A$  et une suite  $(\alpha_n) \in S^\mathbf{N}$  tels

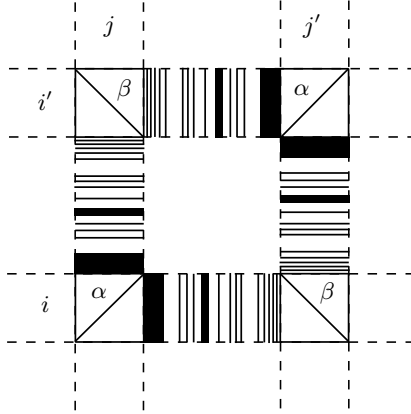


FIGURE 2 – Surface  $Y$  (groupe  $A$  de 2-torsion)

que  $p_n \in C_{i,\alpha_n}^H$  et  $p \in H_i$ . La suite  $\sigma(p_n) \in C_{\alpha_n-i}^V$  ne peut avoir de valeurs d'adhérence que si  $(\alpha_n)$  est stationnaire; dans ce cas, il existe  $\alpha \in S$  tel que  $p_n \in C_{i,\alpha}^H$  ( $n$  assez grand) et  $\sigma(p_n) = \sigma_\alpha(p_n)$  n'a pas de valeurs d'adhérence (voir la preuve du corollaire 2.14). D'après le lemme 2.13, la surface  $Y$  est séparée. Pour étudier la connexité de  $Y$ , observons que deux rubans horizontaux (resp. verticaux) sont reliés par un ruban vertical (resp. horizontal) si et seulement si la différence de leurs indices appartient à  $S - S$ . On suppose de plus que  $S - S$  engendre le groupe  $A$  : la surface  $Y$  est donc connexe. Par construction, elle vérifie la condition (i).

Les géodésiques de lumière de  $Y$  se répartissent en deux types : internes aux rubans, c.-à-d. transverses au champ  $k_Y$  (et complètes quand  $I = \mathbf{R}$ ), ou associées aux zéros de  $f$ . Ces dernières sont complètes ou semi-complètes selon qu'elles correspondent à  $Z_{00}$  ou à  $Z_0 \setminus Z_{00}$ . Observons maintenant que la surface  $Y$  se rétracte par déformation sur la réunion  $\Delta$  des âmes des rubans  $(H_i)_{i \in A}$  et  $(V_j)_{j \in A}$ . Ce rétract  $\Delta$  forme une « grille » dont les sommets correspondent aux carrés  $(C_{i,\alpha}^H)_{(i,\alpha) \in A \times S}$ . On s'intéresse au cycle d'ordre 4 de  $\Delta$  (ou de  $Y$ ) défini par deux indices horizontaux  $i \neq i'$  et deux indices verticaux  $j \neq j'$  tels que  $i + j, j + i', i' + j'$  et  $j' + i$  appartiennent à  $S$  : ses sommets  $C_{i,\alpha}^H, C_{i,\beta}^H, C_{i',\alpha'}^H$  et  $C_{i',\beta'}^H$  sont déterminés par  $i, i', j, j'$  ( $\alpha = i + j, \beta = i + j'$ , etc). On suppose désormais que le groupe  $A$  est de 2-torsion (par exemple  $A \subset (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(\mathbf{N})}$ ) et que la partie  $S$  comprend 0 et engendre  $A$ . Cette hypothèse additionnelle assure la connexité de  $Y$  (voir plus haut) et va permettre, quitte à modifier les réflexions  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in S}$ , de compléter  $Y$  par adjonction de selles.

Nous remplissons maintenant la condition (ii), sur  $Y$ . Étant donnés  $i \in A$  et  $(\alpha, \beta) \in S^2$  avec  $\alpha \neq \beta$ , en posant  $i' = i + \alpha - \beta = i + \beta - \alpha$ ,  $j = \alpha - i$  et  $j' = \beta - i$ , on définit un cycle d'ordre 4 dont les sommets sont  $C_{i,\alpha}^H, C_{i,\beta}^H, C_{i',\alpha'}^H$  et  $C_{i',\beta}^H$  (c'est-à-dire  $\alpha' = \alpha$  et  $\beta' = \beta$ , voir figure 2). Toute orbite de lumière semi-complète du champ doit border deux carrés contigus, c.-à-d. séparés par un zéro simple de  $f$ , et l'argument précédent montre que ces carrés font partie d'une quasi-selle symétrique (figure 2 avec  $\alpha$  et  $\beta$  contigus, les diagonales étant les axes des réflexions de  $\sigma_\alpha$  et de  $\sigma_\beta$ ). Nous définissons un graphe de contiguïté  $\mathcal{G}_f = (S, \mathfrak{E})$ , associé à  $f$ , ayant pour sommets les indices  $\alpha \in S$  et pour arêtes les paires  $\{\alpha, \beta\}$  d'indices contigus. Toutes les quasi-selles de  $Y$  associées à une telle paire sont isométriques. Le graphe  $\mathcal{G}_f$  est connexe (resp. de dimension 0) quand tous les zéros de  $f$  sont simples (resp. non simples). Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont contigus, on peut toujours modifier l'une des réflexions  $\sigma_\alpha$  ou  $\sigma_\beta$  de sorte que les quasi-selles associées se complètent en selles; on dira alors que  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  sont compatibles. Pour toute composante connexe  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{G}_f$ , on peut choisir un sommet  $\alpha \in \mathcal{C}$  et

par récurrence (sur la distance combinatoire à  $\alpha$ ) modifier les réflexions  $\sigma_\beta$  ( $\beta \in \mathcal{C} \setminus \{\alpha\}$ ) afin de rendre compatibles toutes les paires de réflexions associées aux arêtes de  $\mathcal{C}$ . Après cette opération, la surface  $Y$  se complète par adjonction de selles (si  $\mathfrak{E} \neq \emptyset$ ) en une surface notée  $(Y^s, k_Y^s)$ , connexe, paracompacte (en particulier séparée) et vérifiant la condition (ii). Si  $\mathfrak{E} = \emptyset$ , on pose simplement  $(Y^s, k_Y^s) = (Y, k_Y)$ . Soit enfin  $(E_f^u, K^u)$  le revêtement universel de  $(Y^s, k_Y^s)$ . Il s'agit évidemment d'une surface homéomorphe au plan  $\mathbf{R}^2$  et satisfaisant les conditions (i) et (ii), préservées par passage à un revêtement.

Si  $E_f^u$  n'est pas maximale, la surface  $(E_f^u, K^u)$  admet une extension non triviale saturée  $(E, K)$  (proposition 3.1). Il existe une feuille de lumière maximale  $\ell$  de  $E$  qui rencontre  $E_f^u$  et  $E \setminus E_f^u$ . Par la condition (ii),  $\ell \cap E$  est transverse à  $K^u$ . Par suite  $\ell$  est transverse à  $K$  et admet un paramétrage géodésique  $\gamma : J \rightarrow E$  ( $J$  intervalle contenant  $I$ ) tel que  $\langle K, \gamma'(x) \rangle = 1$ . La fonction norme de  $K$  en  $\gamma(x)$  étend  $f$ . Inversement, si  $f$  admet une extension  $g$ , on obtient une extension de  $E_f^u$  en étendant  $R_f$ , proprement plongé dans  $E_f^u$ , par  $R_g$  (voir aussi la remarque 3.23). Enfin l'assertion sur la L-complétude est claire.  $\square$

*Remarque 3.4.* Voici une variante adaptée au cas où les carrés  $(C_\alpha)_{\alpha \in S}$  ne s'accumulent pas dans  $R$  (par exemple si  $f$  est analytique). On prend  $X'^H = (R, k)$  et  $X'^V = (R, -k)$ , que l'on recolle avec les réflexions  $\sigma_\alpha : C_\alpha \rightarrow C_\alpha^\vee$  ( $\alpha \in S$ ) en une surface  $X'$  connexe et séparée. Si  $f$  n'a pas de zéros simples, on pose  $Y'^s = X'$ . Sinon, on considère un revêtement double non trivial au voisinage des bouts de  $X'$  associés à  $\mathfrak{E}$ , que l'on peut compléter comme plus haut (par adjonction de selles) en une surface  $Y'^s$ . Cette surface  $Y'^s$  est en un certain sens (voir §4.3) la plus petite extension de  $R_f$  par une surface sans bord et sans selles à l'infini. Aux orbites de lumière du champ près,  $Y'^s$  a la même taille que  $R_f$  si  $f$  n'a pas de zéros simples, deux fois la taille de  $R_f$  sinon. La topologie de  $Y^s$  dépend de  $f$  et, si  $Y'^s \neq X'$ , du choix du revêtement double de  $X'$ , voir §4.3. Dans le cas où les  $(C_\alpha)_{\alpha \in S}$  s'accumulent, cette construction fonctionne encore, mais elle produit des surfaces  $X'$  et  $Y'^s$  non séparées.

*Exemples 3.5.* Si  $f$  est une fonction affine non constante alors la surface  $E_f^u$  ci-dessus est le plan de Minkowski muni d'un champ de Killing ayant un zéro. De même, si  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2 définie sur  $\mathbf{R}$ , alors  $E_f^u$  est isométrique à un facteur près au revêtement universel de l'espace de de Sitter. Le champ de Killing associé à la construction est elliptique, parabolique ou hyperbolique selon que  $f$  ait 0, 1 ou 2 racines. Les termes elliptique, parabolique ou hyperbolique font référence aux sous-groupes de  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$  qui leurs sont associés (voir [10] pour plus de détails).

## 3.2 Géométrie locale uniforme

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ . On rappelle (voir l'introduction) que l'orbite de  $f$  définie sous l'action à droite du groupe affine (resp. affine euclidien) est notée  $[[f]]$  (resp.  $[f]$ ).

**DÉFINITION 3.6.** Soit  $X$  une surface lorentzienne simplement connexe et soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ .

- (1) Soit  $K$  un champ de Killing non trivial et complet sur  $E$ . On dit que  $(X, K)$  est de classe  $[f]$  s'il existe une coordonnée transverse  $x \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$  (voir proposition 2.21-2)) telle que  $I = x(X)$  et  $\langle K, K \rangle = f \circ x$ .
- (2) On dit que  $X$  est de classe  $[[f]]$  si elle possède un champ de Killing  $K'$  tel que  $(X, K')$  est de classe  $[f]$ .

Par extension, une surface  $(X, K)$  (resp.  $X$ ) non simplement connexe est de classe  $[f]$  (resp. de classe  $[[f]]$ ) si son revêtement universel l'est.

Une surface  $(X, K)$  (resp.  $X$ ) sera dite à *géométrie locale uniforme* si elle est de classe  $[f]$  (resp.  $[[f]]$ ) pour une certaine fonction  $f$ . Si on change de coordonnée transverse, la classe  $[f]$  est inchangée. Si de plus  $K$  est remplacé par  $\lambda K$  ( $\lambda \in \mathbf{R}^*$ ), la classe  $[[f]]$  est inchangée. Cette classe est unique quand  $X$  est à courbure non constante. Par contre, en courbure constante, une surface peut admettre plusieurs classes. Ainsi le plan de Minkowski est de classe  $[[0]]$ ,  $[[ -1]]$ ,  $[[1]]$  et  $[[x]]$ .

Considérons une surface lorentzienne saturée  $(E, K)$ , simplement connexe. Toute feuille de lumière  $\ell$  de  $E$  ne portant pas d'orbite de  $K$  (donc pas de zéro de  $K$ ) doit être partout transverse à  $K$ . Par suite  $\ell$  est contenu dans un *ruban maximal* où la métrique s'exprime sous la forme (1). Les rubans maximaux recouvrent  $E$  à l'exception des zéros du champ  $K$ . Notons  $E_0$  la réunion des orbites de lumière de  $K$  et supposons que  $K$  n'est pas de lumière. Toute composante connexe  $C$  de  $E \setminus E_0$  (voir proposition 2.20) est incluse dans deux rubans maximaux, dont la réunion sera appelée *croix* associée à  $C$ . De plus, on rappelle que  $C$  admet des réflexions locales *génériques* (proposition 2.5). Certains carrés particuliers, dit *symétriques*, peuvent également admettre une réflexion exceptionnelle (ou non générique) par rapport à une feuille du champ  $K$ . Les parties à courbure constante de  $E$  possèdent également des réflexions locales, non génériques.

**DÉFINITION 3.7.** Soit  $(E, K)$  une surface lorentzienne saturée et simplement connexe. On dit que  $(E, K)$  est

- (1) *réflexive* si toute réflexion locale générique de  $(E, K)$  s'étend isométriquement à la croix correspondante,
- (2) *R-homogène* si le groupe  $\text{Is}(E)$  agit transitivement sur l'ensemble des rubans maximaux de  $E$ .

Ces deux propriétés sont invariantes par isométrie usuelle. Dans le cas très particulier où  $K$  est de lumière,  $(E, K)$  est réduite à un ruban plat : la surface  $(E, K)$  est alors réflexive car il n'y a aucune condition à satisfaire ; elle est évidemment R-homogène. Les surfaces  $(E_f^u, K^u)$  du §3.1 sont par construction de classe  $[f]$  et réflexives (voir lemme 3.10). Celles de l'exemple 3.9 ne le sont pas. Nous verrons que le fait d'être à géométrie locale uniforme induit un comportement analytique pour les surfaces lisses. Cette propriété est d'ailleurs automatique dans le cas analytique.

**PROPOSITION 3.8.** Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne saturée et connexe.

- (1) Dans chacun des cas suivants, la surface  $(X, K)$  est à géométrie locale uniforme :
  - (1-a) le flot de  $K$  est périodique,
  - (1-b)  $X$  est analytique.
- (2) On suppose que  $X$  est simplement connexe et maximale. Alors la surface  $(X, K)$  est à géométrie locale uniforme si et seulement si elle est réflexive.

*Preuve.* Supposons d'abord que le flot de  $K$  est périodique. En relevant les cylindres ou les rubans de Möbius feuilletés par  $K$  au revêtement universel  $\tilde{X}$ , on voit que l'espace des orbites  $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$  est séparé. Cet espace est alors un intervalle réel et la surface  $(X, K)$  est clairement à géométrie locale uniforme, d'où (1-a).

Pour la suite de la preuve, on peut supposer que  $X$  est simplement connexe. On se donne alors une coordonnée transverse  $x$  sur  $X$ . Soit  $\sigma$  une réflexion d'une composante  $C$  de  $E \setminus E_0$ . Notons  $R$  et  $R'$  les deux rubans maximaux d'intersection  $C$ . Soient  $g \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$  et  $g' \in \mathcal{C}^\infty(I', \mathbf{R})$  les fonctions telles que  $g \circ x$  et  $g' \circ x$  sont les restrictions de  $\langle K, K \rangle$  à  $R$  et  $R'$  respectivement. La réflexion  $\sigma$  induit la relation  $g'(u) = g(u)$  pour tout  $u \in x(C)$ . Si



$(X, K)$  est supposée analytique alors  $g$  et  $g'$  le sont aussi et cette relation est vraie pour tout  $u \in I \cap I'$ . Les fonctions  $g$  et  $g'$  sont donc des restrictions d'une même fonction analytique inextensible  $f$ . En raisonnant de proche en proche, on voit qu'il en est de même pour chaque ruban. Quitte à restreindre  $f$ , on conclut que  $(X, K)$  est de classe  $[f]$ , d'où (1-b).

Si  $(X, K)$  est supposée maximale et de classe  $[f]$ , alors  $g = f|_I$  et  $g' = f|_{I'}$  sont inextensibles. Par suite  $I = I'$  et  $\sigma$  s'étend à la croix associée à  $C$ . Enfin, comme les réflexions génériques préservent clairement les coordonnées transverses sur une croix (voir remarque 3.11), toute surface réflexive est à géométrie locale uniforme.  $\square$

Nous montrerons plus bas que toute surface simplement connexe  $(E, K)$  réflexive et sans selles à l'infini est R-homogène (voir théorème 3.21). Mais il existe des surfaces réflexives non R-homogènes (par exemple le revêtement universel d'une surface  $E_f^u$  privée d'un point selle, avec  $f$  suffisamment générale) et inversement des surfaces R-homogènes non réflexives.

*Exemple 3.9* (surfaces R-homogènes non réflexives). Soit  $R_f = (R, k)$  le ruban (maximal) associé à une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  qui ne s'annule qu'en deux points, disons  $-1$  et  $1$ , et qui ne change pas de signe. Les deux feuilles de lumière du champ de Killing délimitent 3 composantes notées simplement 1, 2 et 3, dans l'ordre défini par le champ de lumière  $l$  tel que  $\langle k, l \rangle = 1$ . Les composantes de  $(R, -k) \simeq R_f^\vee$  sont dans l'ordre 3, 2, 1. On suppose de plus que les composantes externes 1 et 3 ne sont pas isométriques et que  $f$  est symétrique entre les zéros, c'est-à-dire  $f(x) = f(-x)$  pour  $x \in [-1, 1]$ , de sorte que la composante centrale 2 possède une réflexion exceptionnelle. Cela étant, on considère deux familles de rubans  $(H_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  (« horizontaux ») et  $(V_j)_{j \in \mathbf{Z}}$  (« verticaux »), avec  $H_{2k} = V_{2k} = (R, k)$  et  $H_{2k+1} = V_{2k+1} = (R, -k)$ , assemblés comme sur la figure 3. Les composantes impaires sont identifiées *via* une réflexion générique tandis que les composantes paires sont identifiées *via* la réflexion exceptionnelle. La surface  $Y$  ainsi définie est L-complète et porte un champ de Killing (figure 3, axes des réflexions exceptionnelles en pointillés). Les réflexions génériques des composantes impaires s'étendent à  $Y$ , mais pas celles des composantes paires (c'est la réflexion exceptionnelle qui s'étend). Le revêtement universel  $(E, K)$  est clairement R-homogène mais pas réflexif.

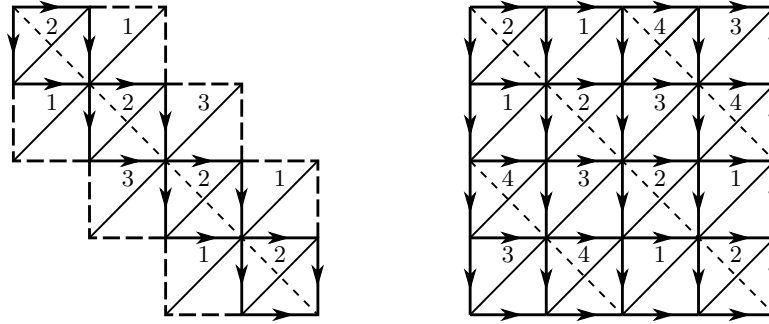


FIGURE 3 – Surfaces R-homogènes non réflexives

Il est facile de construire des variantes possédant des ouverts divisibles. On part avec un ruban périodique  $R$  dont la période de base comprend 4 composantes 1,  $\dots$ , 4. On suppose que les composantes 2 et 4 admettent une réflexion exceptionnelle, puis on considère deux familles  $(H_i)$  et  $(V_j)$  (indexées par  $\mathbf{Z}$ ) de copies de  $R$  et  $R^\vee$  comme ci-dessus. Ces familles sont assemblées périodiquement selon la figure 3, en collant les composantes impaires par des réflexions génériques et les composantes paires par des réflexions exceptionnelles. Après passage au revêtement universel on trouve comme plus haut une surface  $(E', K')$  R-homogène

non réflexive. Chaque copie de  $R$  revêt un tore lorentzien  $T$ . L'extension  $E'$  de  $\tilde{T} = R$  est  $R$ -homogène puisque les translatés de  $\tilde{T}$  par le groupe  $\text{Is}(E')$  recouvrent la surface, mais ses réflexions génériques ne s'étendent pas toutes. Elle n'est donc pas isométrique à l'extension  $E_f^u$  de §3.1, voir lemme 3.10.

Nous considérons maintenant la surface  $E_f^u$  comme espace modèle pour des structures géométriques. Rappelons qu'une surface est *(localement) modelée sur  $E_f^u$* , ou *admet une  $E_f^u$ -structure*, si elle possède un atlas à valeur dans  $E_f^u$  dont les changements de cartes sont des restrictions d'isométries globales de  $E_f^u$ .

LEMME 3.10. *Toute réflexion locale générique de la surface  $E_f^u$  définie au §3.1 s'étend à  $E_f^u$ . Le sous-groupe engendré par ces transformations (appelé sous-groupe générique) agit transitivement sur les rubans maximaux de  $E_f^u$ . En particulier  $E_f^u$  est réflexive et  $R$ -homogène.*

*Preuve.* On peut supposer que  $f$  s'annule sans être constante. Rappelons que  $E_f^u$  est construite comme revêtement universel d'une surface  $Y^s$ , elle-même complétée d'une surface  $Y$  par adjonction de selles. Comme toute isométrie de  $Y$  s'étend par continuité à  $Y^s$ , proposition 2.38, il suffit de prouver la propriété d'extension pour  $Y$ . De plus, il suffit d'étendre une réflexion particulière pour chaque carré de  $Y$ , puis de conjuguer par le flot de  $Y$ . On reprend les notations de la page 23. Si  $(\alpha, i_0) \in S \times A$ , considérons la réflexion du carré  $C_{\alpha, i_0}^H = C_{\alpha, \alpha - i_0}^V$ , notée  $\bar{\sigma}_\alpha$ , induite par l'application identique de  $C_\alpha$  sur  $C_\alpha^V$ . Les points de  $H_i = R$  (resp. de  $V_j$ ) sont notés simplement  $p_i$ , avec  $p \in R$  (resp.  $q_j$ , avec  $q \in R$ ). Soit  $\varphi_\alpha$  l'isométrie involutive de la surface  $X = (\coprod_{i \in A} H_i) \amalg (\coprod_{j \in A} V_j)$  définie par l'application identique de  $H_i$  sur  $V_{\alpha - i}$  et de  $V_j$  sur  $H_{\alpha - j}$ , autrement dit

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(p_i) = p_{\alpha - i} \in V_{\alpha - i} & \text{si } p_i \in H_i \quad (i \in A), \\ \varphi_\alpha(q_j) = q_{\alpha - j} \in H_{\alpha - j} & \text{si } q_j \in V_j \quad (j \in A). \end{cases} \quad (15)$$

Cette application  $\varphi_\alpha$  induit une isométrie  $\hat{\sigma}_\alpha$  qui prolonge  $\bar{\sigma}_\alpha$  sur le quotient  $Y = X/\mathcal{R}$ , voir (14). En effet, supposons que  $p_i \mathcal{R} q_j$ , c.-à-d.  $\beta = i + j \in S$  et  $q = \sigma_\beta(p)$ ; on a alors  $(\alpha - j) + (\alpha - i) = \beta$  (le groupe  $A$  étant de 2-torsion) et  $p = \sigma_\beta(q)$  puisque  $\sigma_\beta$  est involutive, d'où  $\varphi_\alpha(q_j) \mathcal{R} \varphi_\alpha(p_i)$ .

Les extrémités d'une chaîne  $(R_i)_{1 \leq i \leq N}$  de rubans maximaux de  $E_f^u$  ( $R_i \cap R_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ ) sont toujours échangées par un produit de réflexions génériques, d'où la deuxième assertion.  $\square$

Remarque 3.11 (invariance des indices par transformation générique). Fixons un système de coordonnées adaptées  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$  pour le ruban  $R_f$ , donc pour les  $H_i$  et les  $V_j$ . Par construction de  $E_f^u$ , voir notamment (14), les coordonnées  $x$  des rubans se recollent en une fonction encore notée  $x \in \mathcal{C}^\infty(E^u, \mathbf{R})$ ; les carrés des rubans sont ainsi indexés de façon cohérente par un ensemble fixé  $S$ . Si  $\nu^u$  est une forme volume lorentzienne sur  $E_f^u$ , on a  $dx = i_{K^u} \nu^u$ , voir la remarque 2.22. Une réflexion générique préserve  $dx$  et fixe une feuille de  $K$ , elle préserve donc la fonction  $x$ ; en particulier elle préserve les indices des carrés.

Remarque 3.12. La composée  $\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta$  ( $\alpha, \beta \in S$ ) de deux réflexions de  $Y^s$  induites par (15) préserve l'ensemble des rubans horizontaux (resp. verticaux) de  $Y^s$  en décalant leurs indices de  $\alpha - \beta$ . Comme  $A$  est de 2-torsion, on a que  $\hat{\sigma}_\alpha$  et  $\hat{\sigma}_\beta$  commutent (c.-à-d.  $\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta$  est d'ordre 2). Le groupe d'isométrie de  $Y^s$  contient donc un sous-groupe isomorphe à  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(S)}$ .

Voici encore quelques propriétés préliminaires utiles pour l'étude des surfaces réflexives. Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne saturée. Nous appellerons *cycle de rubans* toute suite finie  $(R_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  de rubans de  $(X, K)$  avec  $N \geq 2$ ,  $R_i \cap R_{i+1} \neq \emptyset$  ( $1 \leq i \leq N$ ),  $R_{N+1} = R_1$  et  $R_i \neq R_j$  (comme ouverts de  $X$ ) si  $|i - j| = 1$ . Un cycle de rubans  $(R_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  sera dit

simple s'il existe une courbe polygonale fermée simple constituée de segments géodésiques de lumière  $\ell_1, \dots, \ell_N$ , transverses au flot avec  $\ell_i \subset R_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

LEMME 3.13. *Soit  $(E, K)$  une surface lorentzienne saturée et simplement connexe. Alors tout cycle simple de rubans de  $(E, K)$  est constitué de 4 rubans autour d'un point selle.*

*Preuve.* Soit  $(R_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  un cycle simple de rubans et soit  $\ell = \ell_1 \dots \ell_N$  une courbe polygonale fermée simple comme ci-dessus. Par le théorème de Jordan,  $\ell$  borde un disque  $D$ . Toute orbite de lumière de  $K$  qui coupe  $D$  s'accumule sur un point selle, intérieur à  $D$ . Si elle est non vide, l'intersection de  $D$  avec l'adhérence d'une bande est donc homéomorphe à un disque dont le bord est composé de quatre segments géodésiques de lumière : deux transverses à  $K$  et deux tangents à  $K$  s'intersectant en un point selle. Par conséquent,  $D$  est contenu dans une selle.  $\square$

LEMME 3.14 (relèvement des géodésiques de lumière brisées). *Soient  $X$  et  $Y$  des surfaces lorentziennes connexes et soit  $\mathcal{D} : X \rightarrow Y$  une isométrie locale.*

- (1) *Si toute géodésique de lumière brisée incluse dans  $\mathcal{D}(X)$  se relève par  $\mathcal{D}$ , alors  $\mathcal{D}$  induit un revêtement de  $X$  sur  $\mathcal{D}(X)$ .*
- (2) *Si toute géodésique de lumière brisée de  $Y$  se relève par  $\mathcal{D}$ , alors  $\mathcal{D}(X) = Y$  et  $\mathcal{D}$  est un revêtement.*

*Preuve.* Pour établir (1), il suffit de vérifier que tout chemin  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(X)$  se relève par  $\mathcal{D}$ . On peut approximer  $c$  (au sens  $\mathcal{C}^0$ ) dans  $\mathcal{D}(X)$  par une suite  $(\gamma_n)_n$  de géodésiques de lumière brisées avec  $\gamma_n(0) = c(0)$  et  $\gamma_n(1) = c(1)$ . Comme  $\mathcal{D}$  est un difféomorphisme local, les relevés  $(\tilde{\gamma}_n)$  des  $(\gamma_n)$  convergent au sens  $\mathcal{C}^0$  vers un chemin  $\tilde{c}$  qui relève  $c$ .

Fixons  $p_0 \in X$ . Par connexité, il existe pour tout  $q \in Y$  une géodésique de lumière brisée  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $\gamma(0) = \mathcal{D}(p_0)$  et  $\gamma(1) = q$ . Sous l'hypothèse de (2), on peut relever  $\gamma$  en  $\tilde{\gamma}$ , en particulier  $q = \mathcal{D}(\tilde{\gamma}(1))$ ; par suite  $\mathcal{D}$  est surjective. Pour conclure, il suffit d'appliquer (1).  $\square$

LEMME 3.15. *Si  $(E, K)$  est une surface lorentzienne saturée, simplement connexe et de classe  $[f]$ , alors la surface  $E$  admet une  $E_f^u$ -structure.*

*Preuve.* On peut écarter le cas évident où  $(E, K)$  est réduite à un ruban. Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rubans maximaux de  $(E, K)$ . Pour tout  $R \in \mathcal{R}$ , notons  $U_R$  la réunion de  $R$  avec toutes les selles maximales qui rencontrent  $R$  (et de même dans toute surface); nous allons construire des cartes définies sur les  $U_R$  à valeurs dans la surface  $E_f^u$ . Fixons un ruban maximal  $R_0$  de  $E_f^u$  ainsi qu'une coordonnée transverse  $x$  (resp.  $x^u$ ) sur  $(E, K)$  (resp. sur  $E_f^u$ ) induisant  $f$ . Ce choix permet de définir, *via* les coordonnées adaptées, un plongement isométrique  $\varphi_R$  de  $(R, K)$  dans  $(R_0, K^u)$ , unique modulo action du flot de  $K^u$  et vérifiant  $x^u \circ \varphi_R = x$  sur  $R$ . De plus, si  $R' \in \mathcal{R}$  est tel que  $R \cap R' \neq \emptyset$  et  $R \neq R'$  alors  $\varphi_R$  et  $\varphi_{R'}$  diffèrent par une réflexion générique. Les selles de  $(E, K)$  ne sont pas forcément symétriques mais elles contiennent toujours une selle symétrique. C'est suffisant pour pouvoir déduire de la proposition 2.38 que le plongement  $\varphi_R$  se prolonge de façon unique en un plongement isométrique  $\psi_R$  de  $U_R$  dans  $U_{R_0} \subset E_f^u$ . D'après la discussion ci-dessus, les changements de cartes de l'atlas  $\{(U_R, \psi_R); R \in \mathcal{R}\}$  sont des réflexions locales génériques ou des éléments du flot. Toutes ces transformations s'étendent à  $E_f^u$  (lemme 3.10).  $\square$

Remarque 3.16. Soit  $\text{Is}^\pm(E_f^u, K^u)$  le groupe des isométries de  $E^u$  qui conserve le champ  $K^u$  au signe près (ce groupe coïncide avec  $\text{Is}(E^u)$  sauf en courbure constante). L'atlas ci-dessus définit une  $(\text{Is}^\pm(E_f^u, K^u), E_f^u)$ -structure. Quitte à composer par une réflexion du

modèle, on voit que cette structure possède toujours une développante (voir par exemple [5, p.176] pour cette notion) qui est une isométrie locale de  $(\tilde{X}, \tilde{K})$  dans  $(E_f^u, K^u)$ .

LEMME 3.17. *Soit  $E_f^u$  la surface associée à une fonction  $f$  (voir §3.1). Si  $R_0$  est un ruban maximal de  $E_f^u$ , alors toute isométrie (au sens usuel) de  $R_0$  est la restriction d'une isométrie de  $E_f^u$ .*

*Preuve.* On utilise les notations et les arguments développés dans la preuve du lemme 3.15. Soit  $\varphi \in \text{Is}(R_0)$  et soit  $U_0 = U_{R_0}$ . D'après la proposition 2.38 toute isométrie entre demi-selles s'étend en une isométrie entre selles symétriques, par conséquent  $\varphi$  s'étend en une isométrie  $\varphi_0$  de  $U_0$ . On choisit ensuite comme en 3.15 un atlas  $\{(U_R, \psi_R); R \in \mathcal{R}\}$  sur  $E = E_f^u$ , à valeurs dans  $U_0$  et avec  $\psi_{U_0} = \text{Id}_{|U_0}$ . La composition de chaque carte par  $\varphi_0$  définit un nouvel atlas de  $E_f^u$ -structure sur  $E = E_f^u$ . En effet, les changements de cartes  $\psi_{R'} \circ \psi_R^{-1}$  sont des restrictions d'éléments du flot ou des réflexions locales génériques; même si  $\varphi_0$  n'est *a priori* que locale, leur conjugués par  $\varphi_0$  sont de même nature, donc se prolongent à  $E_f^u$ . Comme  $E = E_f^u$  est L-complète, la développante de cette structure à partir de la carte  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow U_0$  satisfait l'hypothèse de l'assertion (2) du lemme 3.14 : c'est donc une isométrie de  $E_f^u$  qui par construction prolonge  $\varphi$ .  $\square$

LEMME 3.18 (extension des isométries locales, cas analytique). *Si  $f$  est analytique et inextensible, alors toute isométrie locale de  $E_f^u$  s'étend en une isométrie de  $E_f^u$ .*

*Preuve.* Soit  $\Phi$  une isométrie locale de  $E_f^u$  définie sur un ouvert  $U$ . On peut supposer que  $U$  est saturé et, quitte à restreindre  $\Phi$  et à composer par une isométrie de  $E_f^u$ , que  $U$  et  $\Phi(U)$  sont contenus dans un ruban  $R$ . Comme  $f$  est analytique et inextensible, toute symétrie locale de  $f$  est globale. Par suite  $\Phi$  s'étend à  $R$ , puis à  $E_f^u$  d'après la proposition 3.17.  $\square$

PROPOSITION 3.19. *Si  $(X, K)$  est une surface lorentzienne connexe, saturée et de classe  $[f]$ , alors la surface  $X$  admet une  $E_f^u$ -structure.*

*Preuve.* Le revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$  possède une  $E_f^u$ -structure (lemme 3.15) qui permet de le munir d'une isométrie locale  $\mathcal{D} : (\tilde{X}, \tilde{K}) \rightarrow (E_f^u, K^u)$  (remarque 3.16). On définit des cartes sur  $X$  en composant des sections locales du revêtement  $(\tilde{X}, \tilde{K}) \rightarrow (X, K)$  avec  $\mathcal{D}$ . De plus, on suppose que les domaines de cartes sont deux à deux d'intersection connexe. L'analyse des changements de cartes revient alors à comparer  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D} \circ \gamma$ , où  $\gamma$  est un automorphisme du revêtement universel. Il s'agit de montrer que ces deux applications diffèrent par une isométrie globale de  $E_f^u$ .

En utilisant les coordonnées adaptées, on voit que  $\mathcal{D}$  est injective sur tout ruban maximal de  $\tilde{X}$ . Soit  $R$  un tel ruban et soit  $R' = \gamma(R)$ . Les images  $\mathcal{D}(R)$  et  $\mathcal{D}(R')$  sont incluses dans des rubans maximaux  $R_0$  et  $R'_0$  de  $E_f^u$ . Fixons une coordonnée transverse  $x^u$  sur  $E_f^u$ . Alors  $x = x^u \circ \mathcal{D}$  est une coordonnée transverse sur  $\tilde{X}$  et il existe  $\varphi \in \text{Is}(f)$  tel que  $\varphi \circ x = x \circ \gamma$  (action sur la coordonnée transverse, voir proposition 4.1). Ainsi, on a  $\mathcal{D} \circ \gamma|_R = \Phi \circ \mathcal{D}|_R$ , où  $\Phi$  est une isométrie de  $\mathcal{D}(R)$  sur  $\mathcal{D}(R')$  déterminée par l'image d'une géodésique interne à  $\mathcal{D}(R)$  et par l'action de  $\varphi$  sur la coordonnée  $x^u$ . Comme  $\varphi \in \text{Is}(f)$ , l'isométrie  $\Phi$  s'étend en une isométrie de  $R_0$  sur  $R'_0$ ; sachant que  $E_f^u$  est R-homogène (lemme 3.10), on conclut grâce au lemme 3.17 que  $\Phi$  s'étend en une isométrie de  $E_f^u$ .  $\square$

### 3.3 Uniformisation

Nous dirons qu'une surface  $X$  modélisée sur  $E_f^u$  est uniformisée par un ouvert de  $E_f^u$  si son revêtement universel est plongé dans le modèle  $\tilde{E}_f^u$  par une développante de la  $E_f^u$ -structure. La représentation d'holonomie associée réalise alors  $X$  comme quotient d'un ouvert de  $\tilde{E}_f^u$  par l'action d'un sous-groupe d'isométries de  $E_f^u$ . Nous établissons ici l'uniformisation de deux classes de surfaces : les surfaces  $(X, K)$  à géométrie locale uniforme et sans selles à l'infini d'une part et les surfaces  $(X, K)$  compactes (et plus généralement dont le flot de  $K$  est périodique) d'autre part.

LEMME 3.20 (injectivité de la développante). *Soit  $f$  une fonction lisse et soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne lisse connexe et saturée. Dans chacun des cas suivants, toute isométrie locale  $\mathcal{D} : (\tilde{X}, \tilde{K}) \rightarrow (E_f^u, K^u)$  est injective :*

- (1)  $(X, K)$  n'a pas de selles à l'infini,
- (2) le flot de  $K$  est périodique.

*Preuve.* Il suffit d'établir le résultat pour le revêtement universel  $(\tilde{X}, \tilde{K})$  de  $(X, K)$ . Soit  $\mathcal{D} : (\tilde{X}, \tilde{K}) \rightarrow (E_f^u, K^u)$  une isométrie locale.

(1) Grâce aux coordonnées adaptées, on sait que  $\mathcal{D}$  est injective sur tout ruban (maximal)  $R$  de  $\tilde{X}$ . Par conséquent si  $\mathcal{D}$  n'est pas injective il existe deux bandes distinctes de  $\tilde{X}$  dont l'image par  $\mathcal{D}$  est contenue dans un même ruban de  $E_f^u$ . Il existe donc une suite finie  $(R_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  de rubans de  $\tilde{X}$  telle que  $R_1 \neq R_{N+1}$  et telle que la suite  $(\mathcal{D}(R_i))_{1 \leq i \leq N+1}$  est un cycle simple de rubans. D'après le lemme 3.13, les  $\mathcal{D}(R_i)$  sont les 4 rubans qui bordent un point selle. Ce point selle ne peut pas avoir d'antécédent : on en déduit que  $\tilde{X}$  a une « selle à l'infini ».

(2) L'hypothèse de périodicité entraîne la séparation de l'espace des orbites du champ  $\tilde{K}$  (voir la preuve de la proposition 3.8), en particulier deux orbites arbitraires peuvent être reliées par une transversale lisse. Si  $\mathcal{D}$  n'était pas injective, il existerait une courbe fermée lisse transverse à  $K^u$ . Sur une telle courbe, les coordonnées transverses de  $E^u$  seraient strictement monotones, ce qui est absurde.  $\square$

THÉORÈME 3.21 (uniformisation, surfaces sans selles à l'infini). *Soit  $f$  une fonction lisse. Alors toute surface lorentzienne  $(X, K)$  lisse, connexe, saturée, de classe  $[f]$  et sans selles à l'infini est uniformisée par un ouvert de  $E_f^u$ . Si de plus  $X$  est simplement connexe et réflexive (par exemple maximale), alors  $(X, K)$  est isométrique à  $(E_f^u, K^u)$ .*

*Preuve.* On sait que  $X$  est modélisée sur  $E_f^u$  et que l'on peut choisir une développante  $\mathcal{D}$  qui respecte les champs (voir remarque 3.16). D'après le lemme 3.20,  $\mathcal{D}$  est injective, d'où la première assertion.

Si  $X$  est simplement connexe et réflexive, alors toute géodésique de lumière brisée de  $E_f^u$  se relève par  $\mathcal{D} : X \rightarrow E^u$ . En effet, d'une part les géodésiques de lumière internes aux rubans se relèvent car les rubans de  $E_f^u$  et ceux de  $X$  sont isométriques ; d'autre part, tous les autres segments de lumière de  $X$  sont inclus dans une géodésique de lumière complète car  $K$  n'a pas de selles à l'infini. Par suite, lemme 3.14-(2),  $\mathcal{D}$  est surjective, ce qui prouve la deuxième assertion.  $\square$

COROLLAIRE 3.22 (classification des extensions universelles). *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions lisses et inextensibles définies sur des intervalles réels.*

- (1) Les surfaces  $(E_f^u, K_f^u)$  et  $(E_g^u, K_g^u)$  sont isométriques si et seulement si  $[f] = [g]$ .

(2) Les surfaces  $E_f^u$  et  $E_g^u$  sont isométriques (au sens usuel) si et seulement si : ou bien  $E_f^u$  et  $E_g^u$  sont à même courbure constante ( $f'' = g''$  et  $f''' = g''' = 0$ ), ou bien  $[[f]] = [[g]]$ .

*Preuve.* Elle résulte du théorème 3.21 et de la proposition 3.19.  $\square$

*Remarque 3.23.* Si  $(I, f)$  est un prolongement de  $(J, g)$ , la preuve du lemme 3.15 montre que toute surface  $(E, K)$  simplement connexe et de classe  $[g]$  admet une  $E_f^u$ -structure (l'hypothèse de simple connexité est ici essentielle). On déduit du lemme 3.20 que  $(E_g^u, K_g^u)$  se plonge isométriquement dans  $(E_f^u, K_f^u)$ .

**THÉORÈME 3.24** (uniformisation, flot périodique). *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne connexe. Si le flot de  $K$  est périodique, alors  $X$  est uniformisée par un ouvert d'une surface  $E_f^u$  pour une certaine fonction  $f$ .*

*Preuve.* Le résultat découle des propositions 3.8 (géométrie locale uniforme), 3.19 (existence de  $E_f^u$ -structure) et du lemme 3.20 (injectivité de la développante).  $\square$

**THÉORÈME 3.25.** *Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien muni d'un champ de Killing  $K$  non trivial. Le revêtement universel  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  de  $(T, K)$  admet une extension  $(E, K_E)$  simplement connexe,  $L$ -complète et réflexive. Une telle extension est unique à isométrie (usuelle) près.*

*Preuve.* On peut supposer que  $T$  n'est pas plat (sinon le théorème 3.25 est classique). Observons que  $K$  ne s'annule pas d'après le théorème de Poincaré-Hopf, car les seuls zéros possibles sont des points selles. De plus, puisque  $T$  n'est pas plat, le champ  $K$  admet une orbite fermée : il existe  $p \in X$  et  $t_0 \neq 0$  tels que  $\Phi_K^{t_0}(p) = p$ . Cette relation implique  $d\Phi_K^{t_0}(p) = \text{Id}$ , puis  $\Phi_K^{t_0} = \text{Id}$  : le flot de  $K$  est donc périodique. Par suite (théorème 3.24 et remarque 3.16),  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  se plonge isométriquement dans  $(E_f^u, K^u)$ , où  $[f]$  est la classe de  $(T, K)$ . De plus, le champ  $K$  admet une transversale lisse, fermée et simple. En relevant une telle courbe à  $\tilde{T}$ , on voit que  $f$  est périodique. Ainsi  $E_f^u$  est  $L$ -complète, d'où l'existence de l'extension cherchée. Si  $(E, K)$  est une extension simplement connexe,  $L$ -complète et réflexive de  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  alors  $(E, K)$  est forcément de classe  $[f]$  (puisque  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$ ), donc isométrique à  $(E_f^u, K^u)$  d'après le théorème 3.21.  $\square$

**COROLLAIRE 3.26.** *Soit  $T$  un tore lorentzien analytique muni d'un champ de Killing non trivial. À isométrie près, le revêtement universel de  $T$  admet une unique extension analytique, simplement connexe et  $L$ -complète.*

*Preuve.* Le seul point à vérifier est l'unicité. Soit  $E$  une extension comme dans l'énoncé. Par le théorème d'extension des champs de Killing de Nomizu (voir [11]), le relevé du champ de  $T$  au revêtement universel se prolonge en un champ de Killing analytique  $K_E$  sur  $E$ . D'après la proposition 3.8-(2), la surface  $(E, K_E)$  est réflexive. On conclut grâce au théorème 3.25.  $\square$

*Exemple 3.27.* Si  $(T, K)$  est un tore de Clifton-Pohl dont le champ de Killing  $K$  est normalisé par  $\max\langle K, K \rangle = 1$ , la fonction  $f$  associée à  $(T, K)$  est  $\sin(2x)$ . En effet, dans ce cas la courbure est égale à  $-2f$  (voir [1] page 472) et donc  $f$  vérifie  $f'' + 4f = 0$ . L'espace  $E_f^u$  est isométrique au revêtement universel de la surface  $\hat{\Sigma}$  apparaissant dans [1].

L'absence de « selles à l'infini » dans l'énoncé du théorème 3.21 signifie que la surface  $(E, K)$  contient « le maximum » de selles possible. À l'opposé, on trouve la classe des surfaces  $(E, K)$  dont le champ  $K$  ne s'annule pas : on dira que  $(E, K)$  est *sans selles* (toutes les selles potentielles sont à l'infini). Parmi ces surfaces, le revêtement universel de  $E_f^u$  privé



de ses points selles, noté  $(F_f^u, K_F^u)$ , joue un rôle particulier. Bien que n'étant généralement pas L-complète, cette surface satisfait une caractérisation analogue à celle de  $(E_f^u, K^u)$  et permet d'uniformiser les surfaces sans selles de classe  $[f]$ .

**THÉORÈME 3.28** (uniformisation, surfaces sans selles). *Soit  $f$  une fonction lisse. Alors toute surface lorentzienne  $(X, K)$  lisse, connexe, saturée, de classe  $[f]$  et sans selles est uniformisée par un ouvert de  $F_f^u$ . Si de plus  $X$  est simplement connexe et réflexive (par exemple maximale), alors  $(X, K)$  est isométrique à  $(F_f^u, K_F^u)$ .*

*Preuve.* La preuve est analogue à celle du théorème 3.21. L'existence d'une  $F_f^u$ -structure s'obtient par une adaptation immédiate des arguments développés dans le cas des surfaces sans selles à l'infini. L'injectivité de la développante découle du même argument que dans le lemme 3.20, en concluant par le fait que  $F_f^u$  ne contient pas de points selles, donc pas de cycles de rubans. Lorsque  $X$  est simplement connexe et réflexive, l'argument de relèvement des géodésiques de lumière brisées, pour les arcs non internes aux rubans, est légèrement différent. Comme les surfaces sont sans selles, les orbites de lumière des champs de Killing correspondent simultanément, dans  $X$  et dans  $F_f^u$ , à des géodésiques de lumière complètes ou semi-complètes. On peut donc relever les arcs correspondants, d'où la surjectivité de la développante.  $\square$

*Remarque 3.29.* Le théorème 3.28 s'applique notamment aux surfaces compactes. Il donne alors une variante du théorème 3.25 : *le revêtement universel d'un tore lorentzien  $(T, K)$  admet une extension  $(F, K_F)$  simplement connexe, maximale, réflexive et sans selles ; une telle extension est unique à isométrie (usuelle) près.*

*Exemple 3.30.* On a  $E_f^u = F_f^u$  dans les cas suivants :  $f$  ne s'annule pas ( $E_f^u$  est un ruban maximal),  $f$  n'admet que des zéros non simples. Si  $f$  n'admet qu'un seul zéro, simple, alors  $E_f^u$  est une selle maximale et  $F_f^u$  le revêtement universel de cette selle épointée.

En dehors des cas particuliers de l'exemple précédent, il existe de nombreuses surfaces maximales simplement connexes et réflexives de classe fixée  $[f]$ . Elles sont toutes étalées au-dessus d'un ouvert de  $E_f^u$  via une développante, qui généralement n'est pas un revêtement sur son image à cause de la présence de selles à la fois dans la surface et à l'infini. Ces surfaces sont « intermédiaires » entre  $E_f^u$  et  $F_f^u$ , lesquelles apparaissent respectivement comme *la plus petite* et *la plus grande* surface simplement connexe réflexive de classe  $[f]$ . Il peut exister une infinité non dénombrable d'extensions maximales intermédiaires. Supposons par exemple que  $f$  admette une suite de zéros  $(x_i)$  telle que  $f'(x_i) \neq f'(x_j) \neq 0$  pour tout  $i \neq j$ . Soit  $R$  un ruban de  $E_f^u$  et soit  $p_i \in \bar{R}$  le point selle correspondant à  $x_i$ . Chacune de ces selles (munie du champ) est caractérisée par le réel  $f'(x_i)$ . À toute partie  $P$  de  $\mathbf{N}$  on associe  $E_P$  le revêtement universel de  $E_f^u \setminus \{p_i, i \in P\}$ . Ces surfaces sont clairement maximales et  $E_P$  et  $E_{P'}$  sont isométriques si et seulement si  $P = P'$ .

## 4 Isométries et quotients

### 4.1 Espace des feuilles. Groupe d'isométrie

Dans toute la suite,  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$  désigne une fonction inextensible. Pour alléger les notations, la surface lorentzienne maximale  $E_f^u$  associée à  $f$  sera notée simplement  $E^u$ . De plus, nous supposons que  $f^{(3)} \neq 0$  afin d'écarter le cas où  $E^u$  est à courbure constante. Dans le cas particulier où  $f$  ne s'annule pas, nous dirons que  $E^u$  (ou  $f$ ) est *élémentaire*.

Rappelons que  $E^u$  est munie d'un champ de Killing complet  $K^u$ . L'espace des orbites non triviales de  $K^u$  est une variété riemannienne de dimension 1, notée  $\mathcal{E}^u$ ; elle n'est pas séparée sauf si  $E^u$  est élémentaire. Il existe une coordonnée transverse  $x \in \mathcal{C}^\infty(E^u, I)$  vérifiant  $\langle K^u, K^u \rangle = f \circ x$  et induisant une isométrie locale  $\bar{x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}^u, I)$ , proposition 2.21-(2). La norme du champ comme fonction sur  $\mathcal{E}^u$  est donnée par  $\bar{f} = f \circ \bar{x}$ . Les points de branchement de  $\mathcal{E}^u$  correspondent aux bords des composantes de  $\{\bar{f} \neq 0\}$ , c'est à dire aux orbites de lumière de  $K^u$  qui bordent les carrés. Métriquement,  $\mathcal{E}^u$  se décompose en segments à bord double (associés aux carrés, voir proposition 2.15), en intervalles à bord double de la forme  $[0, m[$  ( $m \in ]0, +\infty]$ , associés aux bandes voisines de l'infini) et en segments ordinaires (associés aux composantes de l'intérieur de  $\{\bar{f} = 0\}$ ), raccordés en leurs extrémités. Les bandes de  $E^u$  se projettent dans  $\mathcal{E}^u$  sur des ouverts sans points de branchement, maximaux pour cette propriété. De même que toute variété riemannienne,  $\mathcal{E}^u$  possède des géodésiques (non uniquement déterminées par leur vitesse initiale); au paramétrage près, il s'agit des courbes lisses injectives. Les segments (à bord simple ou double) peuvent s'accumuler. Toutefois, sur une géodésique donnée, l'ensemble des points de branchement est discret.

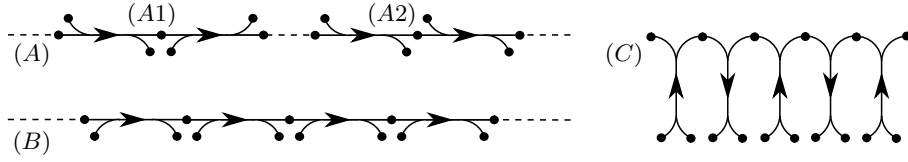


FIGURE 4 – Raccordement de carrés dans l'espace des feuilles

L'espace des feuilles  $\mathcal{E}^u$  est orienté par  $dx$  et également transversalement orienté par  $K^u$ . Le raccordement de deux carrés adjacents (zéro isolé de  $f$ ) est indiqué sur la figure 4 : (A1) si  $f$  change de signe, (A2) sinon. Une géodésique orientée associée à un ruban est caractérisée par la façon dont elle traverse un carré : si elle entre rive droite, elle doit sortir rive gauche et vice-versa (gauche et droite étant définis par une orientation transverse), voir figure 4-(A). D'autres situations sont illustrées sur cette figure : source/puits à l'infini (zéros isolés avec changements de signe) en (B), revêtement infini cyclique d'une pseudo-selle en (C).

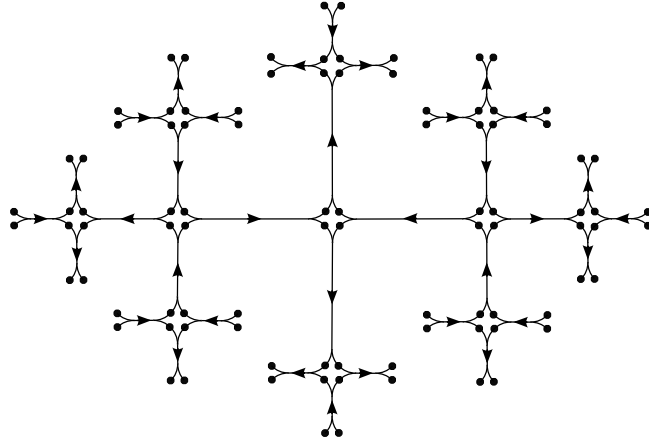


FIGURE 5 – Espace des feuilles de  $K^u$  — cas générique

Aux selles près (cycles de 4 points de branchement), l'espace  $\mathcal{E}^u$  est un arbre réel (voir figure 5, cas où tous les zéros de  $f$  sont simples). Il est localement quasi-compact si et

seulement si les segments à bord double ne s'accumulent pas.

Soit  $\text{Is}(E^u)$  le groupe d'isométrie de  $E^u$ . On note  $\text{Is}^0(E^u)$  la composante neutre (paramétrisée par le flot du champ  $K^u$ ),  $\text{Is}^+(E^u)$  (resp.  $\text{Is}^K(E^u)$ ) le sous-groupe constitué des isométries *directes* (resp. préservant le champ) et on pose  $\text{Is}^{+,K}(E^u) = \text{Is}^+(E^u) \cap \text{Is}^K(E^u)$ . On rappelle que  $\text{Is}(f)$  désigne le groupe de symétrie de  $f$ , voir (3). Grâce au lemme 3.10 et au lemme 3.17, on connaît déjà un certain nombre d'isométries de  $E^u$ . Soit  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  le sous-groupe (distingué) de  $\text{Is}(E^u)$  engendré par les réflexions génériques. En considérant les réflexions génériques associées à un même carré, on voit que  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  contient la composante neutre  $\text{Is}^0(E^u)$ .

PROPOSITION 4.1 (action sur la coordonnée transverse). *L'action de  $\text{Is}(E^u)$  sur une coordonnée transverse de  $E^u$  induisant  $f$  définit une suite exacte scindée*

$$1 \longrightarrow \text{Is}_{\text{gen}}(E^u) \longrightarrow \text{Is}(E^u) \longrightarrow \text{Is}(f) \longrightarrow 1, \quad (16)$$

le groupe  $\text{Is}(f)$  étant trivial sauf si la fonction  $f$  possède des symétries additionnelles, auquel cas il est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  ou  $D_\infty$ . Le groupe  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  agit simplement et transitivement sur l'ensemble des géodésiques de lumière internes aux rubans maximaux; les stabilisateurs de cette action définissent des sections de (16). De plus, si  $R$  est un ruban maximal de  $E^u$ , le groupe  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  est engendré par  $\text{Is}^0(E^u)$  et par la donnée d'une réflexion par carré de  $R$ .

*Preuve.* Soit  $\nu^u$  la forme volume lorentzienne de  $E^u$  vérifiant  $dx = i_{K^u}\nu^u$ . Toute isométrie  $\gamma \in \text{Is}(E^u)$  préserve  $\nu^u$  et  $K^u$  au signe près (on rappelle que la courbure n'est pas constante), donc induit un élément  $\bar{\gamma} \in \text{Is}(I, dx^2)$  tel que  $x \circ \gamma = \bar{\gamma} \circ x$ . Comme la norme de  $K^u$  est invariante par isométrie, on a  $f \circ \bar{\gamma} = f$ ; ainsi  $\bar{\gamma} \in \text{Is}(f)$  et l'action sur la coordonnée transverse  $x$  définit un morphisme  $\theta : \text{Is}(E^u) \rightarrow \text{Is}(f)$ . Le noyau de  $\theta$  contient  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  car les réflexions génériques préservent  $dx$  et fixent une feuille de  $K^u$ , donc préservent  $x$ . Soit  $R$  un ruban maximal et soit  $\ell$  une géodésique de lumière interne à  $R$ . Le groupe  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  agit transitivement sur les géodésiques de lumière internes aux rubans maximaux (action des réflexions génériques sur les rubans, puis action de  $\text{Is}^0(E^u)$ ); comme  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u) \subset \text{Ker } \theta$ , cette action est libre. Le stabilisateur de  $\ell$  dans  $\text{Is}(R)$  est isomorphe à  $\text{Is}(f)$ , proposition 2.6. Puisque toute isométrie de  $R$  s'étend à  $E^u$  (lemme 3.17), le stabilisateur  $H = \text{Is}(E^u)_\ell$  est isomorphe à  $\text{Is}(f)$ . Par conséquent on a une décomposition en produit semi-direct  $\text{Is}(E^u) = \text{Is}_{\text{gen}}(E^u)H$  : la suite (16) est exacte et scindée par  $H$ .

Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux rubans maximaux s'intersectant en un carré et soit  $\sigma_0$  une réflexion générique associée à ce carré. Il est clair que  $\sigma_0$  conjugue les réflexions génériques dont l'axe coupe  $R_1$  avec les réflexions génériques dont l'axe coupe  $R_2$ . Par conséquent le groupe engendré par la donnée d'une réflexion générique dans chaque carré de  $R$  contient au moins une réflexion générique par carré de  $E^u$ .  $\square$

L'action isométrique de  $\text{Is}(E^u)$  sur l'espace des feuilles  $\mathcal{E}^u$  définit un morphisme  $\pi$  de  $\text{Is}(E^u)$  dans le groupe d'isométrie  $\text{Is}(\mathcal{E}^u)$ . Notons  $\Pi$ ,  $\Pi_{\text{gen}}$  et  $\Pi^{+,K}$  les projections par  $\pi$  des groupes  $\text{Is}(E^u)$ ,  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  et  $\text{Is}^{+,K}(E^u)$ . Soit  $H \simeq \text{Is}(f)$  un sous-groupe de  $\text{Is}(E^u)$  comme dans la preuve de la proposition 4.1. Le groupe  $\Pi$  est alors engendré par le sous-groupe distingué  $\Pi_{\text{gen}}$  et par  $\pi(H) \simeq \text{Is}(f)$ . On a donc une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \Pi_{\text{gen}} \longrightarrow \Pi \longrightarrow \text{Is}(f) \longrightarrow 1. \quad (17)$$

Remarque 4.2. Si  $E^u$  n'est pas élémentaire, le groupe  $\text{Is}(\mathcal{E}^u)$  est beaucoup plus gros que  $\Pi$  car il contient des éléments qui échangent les deux branches associées à un couple arbitraire de points non séparés.

PROPOSITION 4.3. *Soit  $E^u$  élémentaire à courbure non constante.*

- (1) *On a  $\text{Ker } \pi = \text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  et  $\Pi$  est isomorphe à  $\text{Is}(f)$ .*
- (2) *Le quotient  $\text{Is}(E^u)/\text{Is}^0(E^u)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \text{Is}(f)$  et la projection de  $\text{Is}(E^u)$  sur  $\text{Is}(E^u)/\text{Is}^0(E^u)$  est scindée.*

*Preuve.* Ici  $E^u$  est un ruban associé à une fonction  $f$  qui ne s'annule pas. Les transformations génériques agissent trivialement sur les feuilles de  $K^u$ , d'où l'assertion (1). D'après la proposition 2.6-(2), le groupe  $\text{Is}(E^u)$  est isomorphe à un produit semi-direct  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u) \rtimes \text{Is}(f)$ , où  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  est engendré par  $\text{Is}^0(E^u)$  et une réflexion générique  $\sigma$  globale. Les symétries éventuelles de  $f$  (relevées par une section de  $\text{Is}(E^u) \rightarrow \text{Is}(f)$ ) commutent avec  $\sigma$  modulo  $\text{Is}^0(E^u)$ , d'où  $\text{Is}(E^u)/\text{Is}^0(E^u) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \text{Is}(f)$ . Enfin,  $\text{Is}^0(E^u)$  agit simplement et transitivement sur les feuilles du feuilletage orthogonal au champ  $K^u$ . Par suite, le stabilisateur d'une de ces feuilles définit une section de la projection modulo  $\text{Is}^0(E^u)$ .  $\square$

THÉORÈME 4.4 (action sur l'espace des feuilles). *Soit  $E^u$  non élémentaire et à courbure non constante. Alors on a  $\text{Ker } \pi = \text{Is}^0(E^u)$  et la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \text{Is}^0(E^u) \longrightarrow \text{Is}(E^u) \xrightarrow{\pi} \Pi \longrightarrow 1 \quad (18)$$

*est scindée. De plus,  $\text{Is}^{+,K}(E^u)$  est isomorphe au produit direct  $\text{Is}^0(E^u) \times \Pi^{+,K}$ .*

*Preuve.* Fixons un ruban maximal  $R$  de  $E^u$ . On peut choisir un ensemble de réflexions génériques  $\Sigma = \{\sigma_\alpha; \alpha \in S\}$ , bijectivement associé aux carrés de  $R$ , de sorte que deux réflexions contiguës aient des axes orthogonaux (procéder par récurrence dans chaque composante du graphe de contiguïté  $\mathcal{G}_f$ ). Notons  $G_{\text{gen}}$  le sous-groupe engendré par  $\Sigma$  et montrons que  $G_{\text{gen}} \cap \text{Is}^0(E^u)$  est trivial. Soit  $\gamma = \sigma_{\alpha_k} \dots \sigma_{\alpha_1} \in G_{\text{gen}} \cap \text{Is}^0(E^u)$  avec  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) et  $k$  minimal. Posons  $R_0 = R$ ,  $R_i = \sigma_{\alpha_i}(R_{i-1})$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Le cycle de rubans  $(R_i)_{i=0}^k$  est simple par minimalité de  $k$ . D'après le lemme 3.13, on a  $k = 4$  et  $\gamma = (\sigma_\alpha \sigma_\beta)^2$  avec  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  contiguës (donc d'axes orthogonaux), d'où  $\gamma = 1$ . D'après la fin de la preuve de la proposition 4.1, tout carré de  $E^u$  est stabilisé par une réflexion appartenant à  $G_{\text{gen}}$ , unique par ce qui précède. Ainsi  $\pi$  induit un isomorphisme de  $G_{\text{gen}}$  sur  $\Pi_{\text{gen}}$ .

Soit  $H \simeq \text{Is}(f)$  l'image d'une section de (16),  $H$  stabilisant le ruban  $R$  (preuve de la proposition 4.1). Notons  $G$  le sous-groupe de  $\text{Is}(E^u)$  engendré par  $G_{\text{gen}}$  et  $H$ , de sorte que  $\pi(G) = \Pi$ . La restriction  $\pi|_G$  sera injective si et seulement si  $H$  normalise  $G_{\text{gen}}$ , ce qui équivaut à dire que  $H$  stabilise la réunion  $\mathcal{A}_S$  des axes des réflexions  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in S}$ . On rappelle que deux axes contigus se coupent orthogonalement en un point selle adhérent au ruban  $R$ . Si  $H$  est trivial, alors  $G = G_{\text{gen}}$  définit une section de  $\pi$ . Supposons que  $H$  n'est pas trivial; nous allons modifier  $H$  et  $\Sigma$  afin que  $H(\mathcal{A}_S) = \mathcal{A}_S$ . Suivant les cas,  $H$  est engendré par une involution, un élément d'ordre infini, ou deux involutions, les involutions ayant un seul point fixe. Noter qu'en composant indépendamment ces générateurs par des éléments de  $\text{Is}^0(E^u)$ , on obtient encore un relevé de  $\text{Is}(f)$  dans le stabilisateur de  $R$ . Le groupe  $\text{Is}(f)$  agit sur l'ensemble  $\pi_0(\mathcal{G}_f)$  des composantes connexes du graphe de contiguïté  $\mathcal{G}_f$ . À toute composante  $T \in \pi_0(\mathcal{G}_f)$  correspond une composante  $\mathcal{A}_T$  de  $\mathcal{A}_S$ , formée par la réunion des axes des réflexions  $(\sigma_s)$  associées aux sommets de  $T$ . On se donne une tranche  $\mathcal{T}$  de l'action de  $\text{Is}(f)$  sur  $\pi_0(\mathcal{G}_f)$ , c.-à-d. une composante par orbite, puis on note  $S_0 \subset S$  l'ensemble des sommets des éléments de  $\mathcal{T}$  et on pose  $\Sigma_0 = \{\sigma_\alpha; \alpha \in S_0\}$ . Si l'action est libre, il suffit de propager les éléments de  $\Sigma_0$  à toutes les bandes de  $R$  en conjuguant par  $H$ . S'il existe un stabilisateur infini, le graphe  $\mathcal{G}_f$  est alors connexe ainsi que l'ensemble  $\mathcal{A}_S$ , et  $H$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$  ou à  $D_\infty$ . On modifie des générateurs de  $H$  comme indiqué plus haut pour avoir  $H(\mathcal{A}_S) = \mathcal{A}_S$ . Reste le cas où tous les stabilisateurs non triviaux sont d'ordre 2. Ils

se répartissent alors suivant une orbite (si  $H \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ) ou deux orbites (si  $H \simeq D_\infty$ ), et les involutions fixant les éléments  $T \in \mathcal{T}$  associés engendrent  $H$ . On modifie ces involutions par des éléments de  $\text{Is}^0(E^u)$  pour qu'elles fixent  $\mathcal{A}_T$ , puis on conclut comme dans le cas où l'action est libre en propageant  $\Sigma_0$  par les conjugaisons de  $H$ . Enfin, les éléments de  $\text{Is}^{+,K}(E^u)$  commutent avec  $\text{Is}^0(E^u)$  (ils préservent le champ), d'où la dernière assertion.  $\square$

*Remarque 4.5.* Les symétries centrales autour des points selles seront appelées *éléments elliptiques génériques*. Le sous-groupe  $\text{Is}_{\text{sel}}(E^u)$  qu'elles engendrent est distingué dans  $\text{Is}(E^u)$ , inclus dans  $\text{Is}_{\text{gen}}(E^u)$  et trivial si  $E^u$  n'admet aucune selle ; à l'inverse, si  $f$  n'a que des zéros simples,  $\text{Is}_{\text{sel}}(E^u)$  est d'indice 2 dans l'image de toute section au-dessus de  $\Pi_{\text{gen}}$ .

## 4.2 Sous-groupes discontinus

Nous supposons ici que  $E^u$  n'est ni à courbure constante, ni élémentaire. Nous poursuivons l'étude dynamique de  $\text{Is}(E^u)$  en négligeant, dans un premier temps, l'action du flot de  $K^u$ . Soit  $G$  l'image d'une section de (18), fixée dans tout le §4.2. Pour tout sous-groupe  $J$  de  $G$ , on pose

$$J_{\text{gen}} = J \cap \text{Is}_{\text{gen}}(E^u), \quad J^+ = J \cap \text{Is}^+(E^u), \quad J^K = J \cap \text{Is}^K(E^u) \text{ et } J^{+,K} = J^+ \cap J^K. \quad (19)$$

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'existence de quotients lisses et séparés de  $E^u$ , associés à certains sous-groupes de  $G^K$ . Soit  $R$  un ruban maximal de  $E^u$ , fixé dans toute la suite. Soit  $\mathcal{G}_f = (S, \mathfrak{E})$  le graphe de contiguïté de  $f$  ; rappelons que  $S$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\{f \neq 0\}$  et que  $\mathfrak{E}$  est l'ensemble des paires  $(\alpha, \beta) \in S^2$  séparées par un zéro simple de  $f$ , voir page 24. On note comme plus haut  $\Sigma = \{\sigma_\alpha; \alpha \in S\}$  l'ensemble des réflexions de  $G_{\text{gen}}$  dont l'axe coupe  $R$  et on rappelle que  $\Sigma$  engendre  $G_{\text{gen}}$ . Commençons par préciser la structure algébrique de  $G_{\text{gen}}$ .

**PROPOSITION 4.6.** *L'ensemble générateur  $\Sigma = \{\sigma_\alpha; \alpha \in S\}$  et les relations  $\sigma_\alpha^2 = 1$  ( $\alpha \in S$ ),  $(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^2 = 1$  ( $\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}$ ) forment une présentation de  $G_{\text{gen}}$ . Autrement dit,  $(G_{\text{gen}}, \Sigma)$  est un système de Coxeter.*

*Preuve.* Si  $\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}$ , la relation  $(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^2 = 1$  est évidemment vérifiée puisque les axes de  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  sont orthogonaux. Soit  $w$  une relation réduite entre des éléments de  $\Sigma$ . En utilisant des conjugués des  $\sigma_\alpha^{2k}$  ( $\alpha \in S, k \in \mathbf{Z}$ ), on se ramène au cas où  $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$  avec  $\sigma_i \in \Sigma$  ( $i = 1, \dots, N$ ) et  $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$ . Considérons la suite  $R_k = (\prod_{i=1}^k \sigma_i)(R)$ ,  $k = 0, \dots, N$ . On a  $R_N = R_0$  et comme  $R_k$  et  $R_{k+1}$  sont les images de  $R$  et  $\sigma_{k+1}(R)$  par une même isométrie,  $(R_0, \dots, R_N)$  forme un cycle de rubans. Il existe une courbe polygonale fermée  $c = \ell_0 \dots \ell_{N-1}$  constituée de segments de lumière  $\ell_i \subset R_i$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) transverses au flot. L'entier  $N$  est nécessairement pair et supérieur à 4. Nous allons prouver par récurrence sur  $N/2 \geq 2$  que  $w$  est produit de conjugués de relations associées à  $\mathfrak{E}$ .

Rappelons que deux rubans  $R'$  et  $R''$  qui se coupent sont échangés par l'unique réflexion de  $G_{\text{gen}}$  associé au carré  $R' \cap R''$ . De plus, tout cycle de 4 rubans est nécessairement de la forme

$$(R', \sigma(R'), \sigma\sigma'(R'), \sigma'(R')) \quad \text{avec} \quad (\sigma\sigma')^2 = 1, \quad (20)$$

pour une unique paire  $\{\sigma, \sigma'\}$  de réflexions de  $G_{\text{gen}}$  (lemme 3.13). Posons  $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$  ( $\alpha_i \in S$ ). Si  $N = 4$ , la courbe polygonale  $c$  est simple et le cycle  $(R_i)_{i=0, \dots, 3}$  est de la forme (20) ; par suite  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  commutent,  $\sigma_3 = \sigma_1$  et  $w = (\sigma_1 \sigma_2)^2$  avec  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathfrak{E}$ . Si  $N \geq 6$ , la courbe  $c$  n'est plus simple (lemme 3.13), mais elle reste immergée : on peut en extraire une courbe simple  $c'$  paramétrée par une restriction de  $c$ . Nécessairement (lemme 3.13, à

nouveau), la courbe  $c'$  est associée à 4 rubans successifs  $(R_{k-2}, \dots, R_{k+1})$  du cycle  $(R_i)$ , de la forme (20). En posant  $\gamma = \sigma_1 \dots \sigma_{k-2}$  et  $\gamma' = \sigma_{k+2} \dots \sigma_N$ , on a  $R' = \gamma(R)$ , les réflexions  $\sigma, \sigma\sigma'$  et  $\sigma'$  étant les conjuguées par  $\gamma$  de  $\sigma_{k-1}$ ,  $\sigma_{k-1}\sigma_k$  et  $\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k+1}$  respectivement. D'où  $\{\alpha_{k-1}, \alpha_k\} \in \mathfrak{E}$ ,  $\sigma_{k+1} = \sigma_{k-1}$  et enfin  $w = (\gamma\sigma_k^{-1})(\sigma_{k-1}\sigma_k)^2(\sigma_k\gamma^{-1})w'$  avec  $w' = \gamma\sigma_k^{-1}\gamma'$ . Le mot  $w'$  est une relation de longueur  $N - 2$ , ce qui achève la récurrence.  $\square$

*Remarque 4.7.* Il résulte de la proposition 4.6 que la famille des degrés modulo 2 par rapport aux générateurs  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in S}$  est bien définie et induit un isomorphisme de l'abélianisé  $G_{\text{gen}}^{ab}$  sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^{(S)}$ .

**DÉFINITION 4.8.** Une partie  $S'$  de l'ensemble  $S$  des composantes connexes de  $\{f \neq 0\}$  est *localement finie* si les éléments de  $S'$  ne s'accumulent pas dans  $\mathbf{R}$ . On dira que la fonction  $f$  (ou que la surface  $E^u$ ) est *de type fini* si  $S$  est localement fini.

On rappelle que la suite exacte (16) se restreint en une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow G_{\text{gen}} \longrightarrow G \longrightarrow \text{Is}(f) \longrightarrow 1, \quad (21)$$

isomorphe à (17). Comme  $E^u$  n'est pas élémentaire, le stabilisateur de  $R$  dans  $G_{\text{gen}}$  est trivial, proposition 2.6. Par suite  $G_{\text{gen}}$  agit simplement et transitivement sur les rubans maximaux de  $E^u$  et le stabilisateur  $H$  de  $R$  dans  $G$  définit une section de (21), en particulier  $H$  est isomorphe à  $\text{Is}(f)$ . Soit  $S'$  une partie de  $S$  invariante par  $\text{Is}(f)$ . On pose  $\Sigma' = \{\sigma_\alpha; \alpha \in S'\}$  et on note  $G'$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\Sigma'$  et  $H$ .

**PROPOSITION 4.9.** *Soit  $E^u$  non élémentaire et soit  $S' \subset S$  invariante par  $\text{Is}(f)$ .*

- (1) *L'action de  $G'$  sur  $E^u$  est propre et discontinue<sup>2</sup> si et seulement si  $S'$  est localement finie.*
- (2) *L'action de  $G^+$  sur  $E^u$  est discontinue<sup>3</sup>.*

*En particulier quand  $f$  est de type fini (par exemple analytique), l'action de  $G$  sur  $E^u$  est propre et discontinue.*

*Preuve.* Quitte à raisonner sur un sous-groupe d'indice fini de  $G'$ , on peut supposer que  $\text{Is}(f)$  est trivial ou isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . Si l'action de  $G'$  n'est pas proprement discontinue, alors il existe une suite convergente  $(p_n)$  de points de  $E^u$  et une suite injective  $(g_n)$  d'éléments de  $G'$  telle que la suite  $(g_n(p_n))$  converge. Comme  $S'$  est invariante par  $\text{Is}(f)$ , on a  $h\Sigma'h^{-1} = \Sigma'$  pour tout  $h \in H$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe donc  $\gamma_n \in G'_{\text{gen}} = G' \cap G_{\text{gen}}$  et  $h_n \in H$  tels que  $g_n = \gamma_n h_n$ . Puisque  $H$  définit une section de (21), une telle écriture est unique dans  $G = G_{\text{gen}}H$ ; par suite le groupe  $G'_{\text{gen}}$  est engendré par  $\Sigma'$ . Soit  $x$  une coordonnée transverse à  $K^u$  comme dans la proposition 2.21. Pour tout  $g \in \text{Is}(E^u)$ , on désigne par  $\bar{g}$  l'élément de  $\text{Is}(f) \subset \text{Is}(I, dx^2)$  vérifiant  $x \circ g = \bar{g} \circ x$ . On désigne par  $x_n$  la coordonnée transverse de  $p_n$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $k_n \in \mathbf{Z}$  tels que  $\bar{h}_n(x_n) = \bar{g}_n(x_n) = x_n + k_n T$ , où  $T$  est soit nul, soit une période minimale de  $f$ . Les suites  $(x_n)$  et  $(\bar{g}_n(x_n))$  étant convergentes, on voit que la suite  $(h_n)$  est forcément stationnaire. En posant  $q_n = h_n(p_n)$ , on obtient une suite convergente  $(q_n)$  dans  $E^u$  telle que  $(\gamma_n(q_n))$  converge. Comme les points selles forment un ensemble discret et fermé et sont de stabilisateur fini, on peut supposer que les suites  $(q_n)$  et  $(\gamma_n(q_n))$  sont chacune contenues dans un ruban. Ces rubans étant forcément distincts, il existe un élément  $w \in G_{\text{gen}}$  et des réflexions génériques  $\sigma_{\alpha_n}$  avec  $\alpha_n \in S$  tels que  $\gamma_n = w\sigma_{\alpha_0}\sigma_{\alpha_n}w^{-1}$ . Le degré modulo 2 de  $\gamma_n$  en  $\sigma_{\alpha_n}$  est donc impair, voir remarque 4.7, et  $\alpha_n \in S'$ . Par conséquent  $S'$  n'est pas localement finie. La réciproque est évidente, ce qui prouve l'assertion (1).

2. Pour tout compact  $K$  de  $E^u$ , l'ensemble  $\{\gamma \in G'; \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.

3. Tout point de  $E^u$  admet un voisinage  $U$  tel que  $\{\gamma \in G^+; \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$  soit fini.



Soit  $p$  un point de  $E^u$ . On veut lui trouver un voisinage  $U$  tel que  $\{\gamma \in G^+; \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$  soit fini. Si  $p$  est un point selle, on prend pour  $U$  la selle maximale qui le contient. Sinon  $p$  possède un voisinage  $U_0$  contenu dans un ruban  $R_0$ , comme l'action de  $G^+$  préserve les feuilletages de lumière, tout  $\gamma \in G^+$  tel que  $\gamma(U_0) \cap U_0 \neq \emptyset$  appartient au stabilisateur de  $R_0$ . On trouve donc facilement un voisinage  $U$  convenable.  $\square$

**COROLLAIRE 4.10.** *Soit  $X$  une surface lorentzienne analytique, simplement connexe et munie d'un champ de Killing non trivial et complet. Si  $X$  n'est pas à courbure constante alors  $\text{Is}(X)$  s'écrit comme le produit semi-direct de  $\text{Is}^0(X) \simeq \mathbf{R}$  et d'un sous-groupe discret  $G_X$  agissant proprement sur  $X$ .*

*Preuve.* D'après les propositions 3.8, 3.19 et la remarque 3.16, il existe une application analytique  $f$  et une développante  $\mathcal{D} : X \rightarrow E_f^u$  préservant les champs de Killing. Soit  $R$  un ruban maximal de  $X$ . Rappelons que  $\mathcal{D}$  est injective sur les rubans de  $X$ . Pour toute isométrie  $\Phi \in \text{Is}(X)$ , on a donc une isométrie locale  $\mathcal{D}(R) \rightarrow \mathcal{D} \circ \Phi(R)$  définie par  $\mathcal{D} \circ \Phi \circ \mathcal{D}^{-1}$ . Comme  $f$  est analytique, cette isométrie se prolonge en  $\theta(\Phi) \in \text{Is}(E_f^u)$  (lemme 3.18) et  $\theta(\Phi)$  est l'unique élément  $\Psi \in \text{Is}(E_f^u)$  vérifiant  $\mathcal{D} \circ \Phi = \Psi \circ \mathcal{D}$ . Par unicité, on obtient un morphisme de groupe  $\theta : \text{Is}(X) \rightarrow \text{Is}(E_f^u)$  qui envoie le flot  $\Phi^t$  de  $X$  sur le flot  $\Psi^t$  de  $E_f^u$ . Si  $G$  est l'image d'une section de (18), le sous-groupe  $G_X = \theta^{-1}(G)$  est clairement transverse à  $\text{Is}^0(X)$ . De plus, si  $\Phi \in \text{Is}(X)$ , il existe  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $\Psi^t \circ \theta(\Phi) = \theta(\Phi^t \circ \Phi) \in G$ . Par suite  $G_X$  scinde  $\text{Is}(X)$ .

Comme l'action de  $G$  sur  $E_f^u$  est propre et discontinue, il suffit pour établir la dernière assertion de vérifier que l'action de  $\Gamma = \text{Ker } \theta$  est propre et discontinue. Si  $s_1, s_2 : \Omega \rightarrow X$  sont deux sections locales de  $D$  définies sur un ouvert connexe  $\Omega$ , alors ( $D$  étant localement injective) on a  $s_1 = s_2$  ou  $s_1(\Omega) \cap s_2(\Omega) = \emptyset$ . En particulier, si  $U$  est un ouvert connexe avec  $D|_U$  injective, les ouverts  $\Phi(U)$  ( $\Phi \in \Gamma$ ) sont mutuellement disjoints. Soit  $(x_n, \Phi_n)_n$  une suite de  $X \times \Gamma$  telle que  $(x_n, \Phi_n(x_n))_n$  converge vers un point  $(x, y) \in X^2$ , et soit  $U, V$  des voisinages ouverts connexes de  $x, y$  avec  $D|_U, D|_V$  injectives et  $D(U) = D(V)$ . Pour  $n$  grand,  $\Phi_n(U)$  coupe  $V$  : on a  $\Phi_n(U) = V$  d'après ce qui précède et la suite  $(\Phi_n)$  est stationnaire.  $\square$

*Remarque 4.11.* Il existe deux autres familles de sous-groupes de  $G_{\text{gen}}$  agissant proprement discontinûment sur  $E^u$  : le sous-groupe normal engendré par  $\Sigma'$  et le sous-groupe dérivé de  $G_{\text{gen}}$ . Dans le premier cas la preuve est similaire à celle ci-dessus. La deuxième affirmation s'obtient en remarquant que le groupe fondamental de la surface  $Y^s$  construite dans la preuve de la proposition 3.3 contient un groupe égal à  $[G_{\text{gen}}, G_{\text{gen}}]$  modulo  $\text{Is}^0(E^u)$ .

*Remarque 4.12.* Il découle de la proposition 4.9 que si  $f$  n'est pas de type fini, alors le groupe d'isométrie de la surface  $Y^s$  ci-dessus contient un sous-groupe de 2-torsion, voir remarque 3.12, qui agit non proprement. Il est de plus facile de perturber la métrique afin que ce sous-groupe soit en fait tout le groupe d'isométrie. On obtient alors une surface lorentzienne dont le groupe d'isométrie est de torsion mais dont la dynamique n'est pas triviale, au sens où son action n'est pas propre.

Notons  $\Pi'$  et  $\Pi'_{\text{gen}}$  les projections dans  $\Pi \simeq G$  des groupes  $G'$  et  $G'_{\text{gen}}$ . Si  $\mathcal{G}_f = (S, \mathfrak{E})$  désigne le graphe de contiguïté de  $f$ , on pose  $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} \cap S' \times S'$  et  $\mathcal{G}' = (S', \mathfrak{E}')$  (sous-graphe de contiguïté associé à  $S'$ ). Voici d'abord une description de l'action du groupe  $G'$  sur  $E^u$ . Quand  $f$  est de type fini (par exemple analytique), l'énoncé suivant vaut pour  $S' = S$ , c'est-à-dire pour  $G$  et  $\Pi$ .

**PROPOSITION 4.13.** *Soit  $E^u$  non élémentaire et soit  $S'$  une partie de  $S$  invariante par  $\text{Is}(f)$  et localement finie. L'action de  $G'_{\text{gen}}$  est différentiablement conjuguée à celle d'un*

groupe de réflexions du plan hyperbolique, associé à un polygone  $\mathcal{P}_0$  dont les côtés sont en bijection avec  $S'$ . En particulier, si  $(x_\alpha)_{\alpha \in S'}$  désignent les réflexions associées à  $\mathcal{P}_0$ , le groupe  $\Pi'_{\text{gen}} \simeq G'_{\text{gen}}$  admet la présentation

$$\langle x_\alpha \ (\alpha \in S') \mid x_\alpha^2 = 1 \ (\alpha \in S') ; (x_\alpha x_\beta)^2 = 1 \ (\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}') \rangle. \quad (22)$$

Quand  $\text{Is}(f)$  n'est pas trivial, le groupe  $G' \simeq \Pi'$  est également différentiablement conjugué à un groupe discret d'isométries du plan hyperbolique, engendré par les réflexions génériques  $(x_\alpha)_{\alpha \in S'}$  et par les éléments non génériques suivants, fixant  $\mathcal{P}_0$  :

- (1) si  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , un élément elliptique d'ordre 2 (1a) ou une réflexion (1b),
- (2) si  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$ , un élément d'ordre infini, direct (hyperbolique ou parabolique) ou indirect,
- (3) si  $\text{Is}(f) \simeq D_\infty$ , deux elliptiques d'ordre 2 (3a), ou un elliptique d'ordre 2 et une réflexion (3b), ou deux réflexions (3c),

où les elliptiques (resp. les réflexions) correspondent aux involutions de  $\text{Is}(f)$  sans point fixe (resp. avec point fixe) sur  $S'$ .

*Preuve.* La propriété de l'action de  $G'$  implique l'existence d'une métrique riemannienne sur  $E^u$  invariante par  $G'$  ([13, thm. 4.3.1]). On munit  $E^u$  de la structure de surface de Riemann définie par des coordonnées locales isothermes. Il existe alors un biholomorphisme de  $E^u$  sur  $X$ ,  $X = \mathbf{C}$  ou  $\mathbf{H}$  (demi-plan de Poincaré), biholomorphisme qui conjugue  $G'$  en un groupe  $G'_X$  de transformations holomorphes ou anti-holomorphes de  $X$ . Supposons que  $X = \mathbf{C}$ . Le groupe  $G'_X$  doit alors préserver la métrique euclidienne usuelle, sans quoi il admettrait des stabilisateurs infinis. De plus  $X/G'_X$  ne peut être compact (voir le début de la preuve du théorème 3.25). Par suite, ou bien  $G'_X$  est fini et  $E^u$  est une selle, ou bien  $X/G'_X$  est revêtue par une cylindre ; dans les deux cas, l'orbifolde  $X/G'_X$  admet aussi une structure hyperbolique. On peut donc supposer que  $X = \mathbf{H}$  dans tous les cas. Par suite  $G'$  est conjugué par un difféomorphisme  $\varphi$  à un sous-groupe discret  $G'^\varphi$  d'isométries de  $\mathbf{H}$ .

On a vu dans la preuve de la proposition 4.9 que  $G'_{\text{gen}} = G' \cap G_{\text{gen}}$  est engendré par  $\Sigma'$ . De plus  $G'/G'_{\text{gen}}$  est isomorphe à  $H \simeq \text{Is}(f)$ . Soit  $\Omega'$  l'ensemble des réflexions  $\gamma'\sigma_\alpha\gamma'^{-1}$  pour  $\sigma_\alpha \in \Sigma'$  et  $\gamma' \in G'_{\text{gen}}$ , et soit  $\mathcal{A}'$  la réunion des axes des éléments de  $\Omega'$ . L'ensemble  $\mathcal{A}'$  est stable par  $G'$ , ainsi que son complémentaire dans  $E^u$ , noté  $\mathcal{A}'^c$ . D'après la remarque 4.7, deux réflexions distinctes dont les axes coupent  $R$  ne peuvent pas être conjuguées dans  $G_{\text{gen}}$  ; les seuls éléments de  $\Omega'$  dont l'axe coupe  $R$  sont donc ceux de  $\Sigma'$ . Par suite, les composantes de  $\mathcal{A}'^c$  ne s'accumulent pas ( $S'$  est localement finie) et tout élément de  $\mathcal{A}'$  est adhérent à l'une d'elle. Si  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  sont des composantes de  $\mathcal{A}'^c$ , il existe un chemin  $c$  joignant  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$ , évitant les points selles et tel que  $c([0, 1]) \cap \mathcal{A}'$  soit fini. Le produit des réflexions par rapport aux axes correspondants échange  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  ; le groupe  $G'_{\text{gen}}$  agit donc transitivement sur les composantes de  $\mathcal{A}'^c$ . Soit  $\Sigma''$  l'ensemble des réflexions dont les axes bordent  $\mathcal{D}_0$ . Si  $\sigma \in \Sigma''$ , les réflexions associées au domaine voisin  $\sigma(\mathcal{D}_0)$  sont les conjuguées des éléments de  $\Sigma''$  par  $\sigma$  ; par suite, tout élément de  $\Omega'$  est produit d'éléments de  $\Sigma''$  et finalement  $G'_{\text{gen}}$  est engendré par  $\Sigma''$  (ou par les réflexions associées à n'importe quelle composante de  $\mathcal{A}'^c$ ).

Notons  $\mathcal{P}_0$  l'adhérence de  $\varphi(\mathcal{D}_0)$  dans  $\mathbf{H}$ . Il s'agit d'un polygone géodésique, dont les sommets ont des angles droits et correspondent à des points selles. Le conjugué  $\varphi G'_{\text{gen}} \varphi^{-1}$  coïncide avec le groupe de réflexions associé à  $\mathcal{P}_0$  : la présentation cherchée résulte du théorème de Poincaré, à l'indexation des générateurs près. De plus, on voit que l'action de  $G'_{\text{gen}}$  sur les composantes de  $\mathcal{A}'^c$  est libre. D'après ce qui précède, toute réflexion  $\sigma \in \Sigma''$  est conjuguée dans  $G'_{\text{gen}}$  à une unique réflexion  $\sigma_\alpha \in \Sigma'$ , que nous notons  $\xi(\sigma)$ . Pour tout  $\alpha \in S'$ , chaque composante de  $\mathcal{A}'^c$  bordée par l'axe de  $\sigma_\alpha$  est congruente à  $\mathcal{D}_0$  par un élément de  $G'_{\text{gen}}$ . L'application  $\xi : \Sigma'' \rightarrow \Sigma'$  est donc surjective. Elle est également injective ; en effet si  $\gamma_i \sigma_i \gamma_i^{-1} = \sigma_\alpha \in \Sigma'$  ( $\gamma_i \in G'_{\text{gen}}$ ,  $i = 1, 2$ ), on peut supposer que  $\gamma_1(\mathcal{D}_0) = \gamma_2(\mathcal{D}_0)$ , d'où

$\gamma_1 = \gamma_2$  et  $\sigma_1 = \sigma_2$ . De plus, si les axes de  $\sigma, \tau \in \Sigma''$  se coupent, les indices de  $\xi(\sigma)$  et de  $\xi(\tau)$  doivent être contigus, et inversement. Ainsi, le graphe d'incidence des côtés de  $\mathcal{D}_0$  (ou de  $\mathcal{P}_0$ ) est simplicialement isomorphe au graphe  $\mathcal{G}'$  et on a bien la présentation annoncée (22) pour  $G'_{\text{gen}} \simeq \Pi'_{\text{gen}}$ .

Considérons le stabilisateur  $H_0$  de  $\mathcal{D}_0$  dans  $G'$ . Comme l'action de  $G'_{\text{gen}}$  sur les composantes de  $\mathcal{A}^c$  est libre et transitive, le stabilisateur  $H_0$  est isomorphe à  $G'/G'_{\text{gen}} \simeq \text{Is}(f)$ , supposé non trivial. Si  $H_0$  est infini cyclique engendré par  $h$ , alors  $h$  n'a pas de point fixe, c'est le cas (2) de l'énoncé. Sinon,  $\text{Is}(f)$  est engendré par des involutions et on trouve les cas (1) et (3) de l'énoncé. Toute involution de  $\text{Is}(f)$  se relève dans  $H$  (stabilisateur de  $R$  dans  $G$ ) en un elliptique non générique  $\tau$  centré dans  $R$ . En conjuguant par  $G'_{\text{gen}}$ , on obtient un elliptique non générique  $\tau_0 \in \text{Is}(E^u)$  dont le centre appartient à  $\mathcal{D}_0$  si  $\tau$  ne fixe aucune composante  $s \in S'$  ou à  $\partial\mathcal{D}_0$  sinon. Dans le premier cas  $\tau_0 \in H_0$ , dans le second c'est une réflexion non générique  $\tau_0\sigma$  (pour un  $\sigma \in \Sigma''$ ) qui fixe  $\mathcal{D}_0$ .  $\square$

*Remarque 4.14.* D'après la proposition 4.6, on sait que  $(G'_{\text{gen}}, \Sigma')$  est un système de Coxeter, [2, Thm. 2, p. 20]. On remarquera que la présentation de la proposition 4.13 est analogue, mais avec un système générateur différent.

*Remarque 4.15.* Si  $f$  est de type fini, les domaines fondamentaux explicites donnés plus bas pour  $S' = S$  fournissent, *via* le théorème de Poincaré, une présentation du groupe  $\Pi$  dans tous les cas.

### 4.3 Quotients minimaux

Nous nous intéressons maintenant aux quotients lisses de  $E^u$ . Par exemple, quand  $f$  est de type fini, les sous-groupes sans torsion  $\Gamma$  de  $\Pi$  (dont on connaît maintenant la structure algébrique) définissent des quotients lisses *via* une section de (18). Ces surfaces portent automatiquement un « feuilletage de Killing » (lemme 2.1) et même un champ de Killing quand  $\Gamma$  est inclus dans  $\Pi^K$ . Nous chercherons  $\Gamma$  d'indice aussi petit que possible ; dans cette étude, les morphismes  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2 = \{\pm 1\}$  (caractères) et  $\omega : \Pi \rightarrow \mu_2^2$  vont jouer un rôle clé. On identifie comme dans la présentation (22) le graphe  $\mathcal{G}_f$  avec le graphe d'incidence des côtés de  $\mathcal{D}_0$  (ou de  $\mathcal{P}_0$ ) ; les réflexions associées à ces côtés seront notées simplement  $\gamma$  ( $\gamma \in S$ ) dans la suite. Si  $\text{Ker } \rho$  est sans torsion, la condition suivante est évidemment vérifiée :

$$\rho(\alpha\beta) = -1 \quad (\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}). \quad (23)$$

De même, si  $\text{Ker } \omega$  est sans torsion, les valeurs  $\omega(\gamma)$  pour  $\gamma \in S$  et  $\omega(\alpha\beta)$  pour  $\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}$  sont non triviales, et les valeurs de  $\omega$  sur  $\alpha, \beta$  et  $\alpha\beta$  ( $\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}$ ) doivent être mutuellement distinctes, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \omega(\gamma) \neq (1, 1) & (\gamma \in S) \\ \omega(\alpha) \neq \omega(\beta) & (\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}). \end{cases} \quad (24)$$

L'apparition de morphismes  $\omega : \Pi \rightarrow \mu_2^2$  dans notre problème provient du phénomène algébrique suivant.

LEMME 4.16. *Soit  $\Pi''$  un groupe contenant un sous-groupe  $K''$  isomorphe à  $\mu_2^2$  et soit  $\Gamma''$  un sous-groupe de  $\Pi''$ . On suppose que*

(i)  *$\Gamma''$  est d'indice 4 et n'a pas de 2-torsion,*

(ii)  *$\Gamma''$  est engendré par des produits de la forme  $x\delta'$  avec  $x \in K''$  et  $\delta'^2 = 1$ .*

*Alors  $\Gamma''$  est distingué dans  $\Pi''$  et le quotient  $\Pi''/\Gamma''$  est isomorphe à  $\mu_2^2$ . De plus, si  $\Pi''$  est engendré par des involutions, alors (ii) est une conséquence de (i).*

*Preuve.* Comme  $\Gamma''$  n'a pas de 2-torsion, les classes  $x\Gamma''$  ( $x \in K''$ ) sont mutuellement distinctes et on a  $\Pi'' = \coprod_{x \in K''} x\Gamma''$ . Posons  $K'' = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ . Soit  $\delta \in \Pi''$  tel que  $\delta^2 = 1$  et  $\alpha\delta \in \Gamma''$ . Il existe  $(x, \gamma) \in K'' \times \Gamma''$  tel que  $\beta(\alpha\delta)\beta = x\gamma$ . L'éventualité  $x = \beta$  est exclue car  $\beta \notin \Gamma''$ ;  $x = \alpha$  contredit (i);  $x = \alpha\beta$  implique  $\beta\delta = (\delta\beta)^{-1} \in \Gamma''$  qui est absurde. On a donc  $x = 1$ . De même, on vérifie que  $(\alpha\beta)(\alpha\delta)(\alpha\beta) \in \Gamma''$ . De plus  $\alpha(\alpha\delta)\alpha = (\alpha\delta)^{-1} \in \Gamma''$ . Finalement tous les conjugués  $\alpha\delta$  appartiennent à  $\Gamma''$ . Grâce à la condition (ii), il en résulte que  $\Gamma''$  est normal. Enfin, le quotient  $\Pi''/\Gamma''$  est un groupe de 2-torsion d'ordre 4.

Supposons que  $\Pi''$  est engendré par des involutions et que  $\Gamma''$  vérifie (i). Tout élément  $\gamma \in \Gamma''$  s'écrit  $\gamma = \delta_1\delta_2 \dots \delta_N$ , où les  $\delta_i$  sont des involutions et  $N \geq 2$ . Par (i), il existe  $x_N \in K''$ ,  $x_N \neq 1$ , tel que  $x_N\delta_N \in \Gamma''$ . On a  $\gamma(x_N\delta_N)^{-1} = x_N(x_N\delta_1x_N) \dots (x_N\delta_{N-1}x_N)$ . Par récurrence, on voit qu'il existe  $N$  involutions  $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \Gamma''$  et  $x_1, \dots, x_N \in K''$  tels que  $\gamma(x_N\sigma_N)^{-1}(x_{N-1}\sigma_{N-1})^{-1} \dots (x_1\sigma_1)^{-1} \in \Gamma'' \cap K''$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 4.17.* Si un groupe  $\Gamma''$  contient un sous-groupe  $K''$  isomorphe à  $\mu_2^2$ , alors le début de la preuve précédente montre que tout sous-groupe  $\Gamma''$  sans 2-torsion est d'indice au moins 4.

Nous verrons plus bas que la topologie des quotients de  $E^u$  par des sous-groupes sans torsion maximaux (si  $f$  est de type fini) dépend du groupe  $\text{Is}(f)$ . Dans certains cas, il convient en outre de distinguer plusieurs types de fonctions  $f$ . Pour tout  $s \in S$ , on note  $(-1)^s$  le signe de  $f$  sur la composante  $s$ .

**DÉFINITION 4.18.** On suppose que  $\text{Is}(f)$  est infini. Soit  $S'$  une partie de  $S$  localement finie, invariante par  $\text{Is}(f)$  et munie de l'ordre total induit par  $\mathbf{R}$ .

- (1) (types pair et impair) On dit que la partie  $S'$  est *de type pair* si le nombre d'éléments de  $S'$  par période minimale de  $f$  est pair, *de type impair* sinon.
- (2) (types pairs unilatère et bilatère) Lorsque la partie  $S'$  est de type pair, on dit que  $S'$  est *unilatère* si  $(-1)^{s_1}(-1)^{s_2} = -1$  pour tout couple de composantes successives  $(s_1, s_2) \in S'^2$ , *bilatère* sinon.

Quand  $f$  est de type fini, on dit que  $f$  est *de type pair unilatère* (resp. *pair bilatère*, *impair*) si  $S$  est de type pair unilatère (resp. pair bilatère, impair).

On spécifiera le type quand il n'est pas déterminé par l'action de  $\text{Is}(f)$  sur  $S'$ . Le cas (3a) est de type pair bilatère, le cas (3b) impair et le cas (3c) de type pair unilatère ou bilatère, noté  $(3c^{+u})$  ou  $(3c^{+b})$ . Le cas (2) peut être d'un type arbitraire :  $(2^{+u})$ ,  $(2^{+b})$  ou  $(2^{-})$ .

**LEMME 4.19** (description géométrique des types). *On suppose que  $\text{Is}(f)$  est infini. Soit  $G' \subset \text{Is}(E^u)$  associé à une partie  $S' \subset S$  localement finie et invariante par  $\text{Is}(f)$ , et soit  $\mathcal{D}_0 \subset E^u$  un pavé fondamental pour le groupe « de réflexions »  $G'_{\text{gen}}$ . On note  $h_0 \in G'$  un générateur du sous-groupe cyclique d'indice minimal (c.-à-d. 1 ou 2) du stabilisateur de  $\mathcal{D}_0$  dans  $G'$ .*

- (1) *Si  $S'$  est de type pair, alors le champ de Killing  $K$  est partout rentrant (ou partout sortant) sur  $\partial\mathcal{D}'_0$  si et seulement si  $S'$  est unilatère.*
- (2) *Si  $S'$  est de type pair, alors  $h_0 \in G'^{+,K}$ . Si  $S'$  est de type impair, alors  $h_0$  est indirect et inverse le champ  $K$ .*

*Preuve.* On suppose  $S'$  de type pair. Soit  $R_1$  un ruban maximal de  $E^u$  qui coupe  $\mathcal{A}'$ . D'après la preuve de la proposition 4.13 (dont on reprend les notations),  $\mathcal{A}' \cap R_1$  est l'image de  $\mathcal{A}' \cap R$  par un élément de  $G'_{\text{gen}}$ , où  $R$  désigne le ruban « de base ». Ainsi le caractère unilatère ou bilatère peut se lire dans un ruban arbitraire coupant  $\mathcal{A}'$ . Appelons *voisins* deux côtés de  $\partial\mathcal{D}_0$  inclus dans un même ruban ; chaque côté de  $\mathcal{D}_0$  admet deux voisins. Ces côtés

(et plus généralement les axes des réflexions génériques) ont un signe : temps ou espace, égal au signe de  $-f$ . On constate que le champ  $K$  est rentrant (ou sortant) sur deux côtés voisins si et seulement si leurs signes sont opposés, d'où l'assertion (1).

On peut toujours choisir  $\mathcal{D}_0$  tel que  $\mathcal{D}_0 \cap R \neq \emptyset$ . Soit  $h \in H$  tel que  $h_0 h^{-1} \in G'_{\text{gen}}$ . On rappelle que  $H$  et  $H_0$  (stabilisateurs  $H$  et  $H_0$  de  $R$  et de  $\mathcal{D}_0$ ) définissent des sections de  $G' \rightarrow G'/G'_{\text{gen}}$ . Si  $N$  désigne le nombre d'axes d'éléments de  $\Sigma'$  séparant  $\mathcal{D}_0 \cap R$  et  $h(\mathcal{D}_0 \cap R)$  dans  $R$ , on a  $h(\mathcal{D}_0) = \sigma_1 \dots \sigma_N(\mathcal{D}_0)$  avec  $\sigma_i \in \Sigma'$  ( $i = 1, \dots, N$ ). De plus, la parité de  $N$  vaut celle de  $S'$ . Par suite  $h = \sigma_1 \dots \sigma_N h_0^{\pm 1}$ . Comme  $h \in G'^{+,K}$ , on en déduit l'assertion (2).  $\square$

À partir d'ici nous supposons pour simplifier que  $f$  est de type fini et nous prenons  $S' = S$ . Cependant, on gardera à l'esprit que tous les énoncés suivants valent pour toute partie  $S' \subset S$  localement finie et invariante, voir la remarque 4.31.

Soit  $\nu$  (resp.  $\nu^K$ ) l'indice minimal dans  $\Pi$  d'un sous-groupe sans torsion (resp. et inclus dans  $\Pi^K$ ). D'après la remarque 4.17, deux éventualités se présentent, suivant que  $\text{Is}(E^u)$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\mu_2^2$  ou non. Dans ce dernier cas, on dira que  $\text{Is}(E^u)$ , ou  $E^u$ , n'a pas de produits elliptiques. Géométriquement, cela revient à dire que les axes de deux réflexions (génériques ou non) distinctes de  $E^u$  sont toujours disjoints, ou encore que  $E^u$  n'admet pas de selles ni de réflexions non génériques : cas (0), (1a), (2) et (3a) avec  $\mathfrak{E} = \emptyset$ ; nous commençons par régler ce cas particulier plus simple.

**PROPOSITION 4.20** (indice minimal sans produits elliptiques). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini et sans produits elliptiques. Alors le groupe  $\Pi^K$  est sans torsion et les indices minimaux valent  $\nu = \nu^K = 2$ . Si l'on note  $\Sigma \setminus F$  le type topologique de  $E^u/G^K$ , avec  $\Sigma$  surface fermée et  $F$  sous-ensemble discret non vide de  $\Sigma$ , on a de plus*

- (1) *si  $\text{Is}(f) \simeq \{1\}$ ,  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ou  $D_\infty$ , l'indice  $\nu$  est réalisé par  $\Pi^K$  uniquement et la surface  $\Sigma$  est respectivement la sphère, le plan projectif ou la bouteille de Klein,*
- (2) *si  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$ , l'indice  $\nu$  est réalisé par deux sous-groupes  $\Pi^K$  et  $\Gamma$ . Si  $f$  est de type pair unilatère (resp. pair bilatère ou impair) alors la surface  $\Sigma$  est une sphère (resp. un tore) et la surface associée à  $\Gamma$  est un plan projectif (resp. une bouteille de Klein).*

*Preuve.* On rappelle que  $\Pi$  s'identifie à un groupe discret d'isométries de  $\mathbf{H}$  et que  $\Pi_{\text{gen}}$  est engendré par les réflexions  $(\alpha)_{\alpha \in S}$  par rapport aux côtés d'un polygone  $\mathcal{P}_0$ . À partir de  $\mathcal{P}_0$ , on construit facilement un polygone fondamental  $\mathcal{P}_\Pi$  pour  $\Pi$  à l'aide des générateurs du stabilisateur de  $\mathcal{P}_0$  dans  $\Pi$  (proposition 4.13) : des elliptiques non génériques  $s_i$  ( $i = 1$  pour (1a),  $i = 1, 2$  pour (3a)) et dans le cas (2) un élément d'ordre infini  $h_0$ , direct ou non (cas pair ou impair). Si  $\alpha_0 \in S$ , le sous-groupe  $\Pi^K$  est engendré par les  $\alpha_0 \alpha$ , les  $\alpha_0 s_i$  ( $\alpha \in S$ ),  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$  ou  $\alpha_0 h_0$  et  $h_0 \alpha_0$  dans le cas (2). De plus, en l'absence de produits elliptiques, tout élément de torsion est conjugué à une réflexion ou à un elliptique non générique, donc  $\Pi^K$  est sans torsion. Tout sous-groupe sans torsion d'indice 2 doit contenir les produits de deux involutions arbitraires, donc coïncide avec  $\Pi^K$  dans les cas (0), (1a) et (3a). Dans le cas (2), on trouve deux possibilités pour  $\Gamma$  selon que  $h_0 \in \Gamma$  ou  $\alpha_0 h_0 \in \Gamma$ . D'après le lemme 4.19,  $h_0 \in \Pi^K$  pour le type pair, tandis que  $\alpha_0 h_0 \in \Pi^K$  pour le type impair (figure 6). Enfin, il suffit de doubler le polygone  $\mathcal{P}_\Pi$  par rapport à un côté  $\alpha_0 \in S$  pour obtenir un domaine fondamental  $\mathcal{P}_\Gamma$  de  $\Gamma$  dans tous les cas. Les côtés de  $\mathcal{P}_\Gamma$  sont recollés par des éléments de la forme  $\alpha_0 \alpha$  ( $\alpha \in S$ ),  $\alpha_0 s_i$  (cas (1a) et (3a)),  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$  ou  $\alpha_0 h_0$  et  $h_0 \alpha_0$  (cas (2)), ce qui permet de déterminer facilement la topologie de la surface  $\Sigma$  (voir figure 6). L'ensemble  $F$ , quand  $\mathbf{H}/\Gamma$  est de type topologique fini, sera précisé à la proposition 4.26.  $\square$

**Remarque 4.21.** Les paires de côtés du polygone fondamental  $\mathcal{P}_\Pi$  sont identifiées par des générateurs génériques  $(\alpha_0 \alpha)$  ou non génériques  $(\alpha_0 s_i, h_0, \dots)$ . Plusieurs cas se présentent,

suivant qu'il existe ou non des identifications génériques entrelacées avec les identifications non génériques. Cela n'influence pas la topologie du quotient, à l'exception des cas  $(2^{+u})$  et  $(2^{+b})$ . Cette remarque vaut également quand  $E^u$  admet des produits elliptiques, voir plus bas.

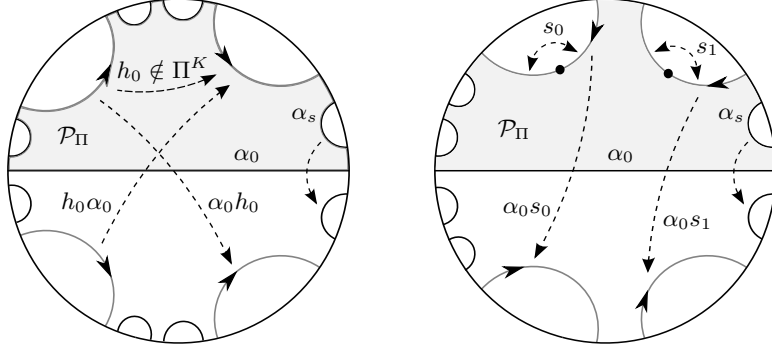


FIGURE 6 –  $E^u$  sans produits elliptiques, cas  $(2^-)$  et  $(3a)$

Quand la surface  $E^u$  admet des produits elliptiques, nous allons montrer que  $\nu = \nu^K = 4$  dans tous les cas (voir la remarque 4.17); à l'exception du cas (2), le groupe  $\Pi$  est engendré par des involutions et les sous-groupes sans torsion d'indice 4 seront tous distingués, lemme 4.16. Soit  $\mathcal{P}_\Pi$  un polygone fondamental pour l'action de  $\Pi$ , et soit  $(\alpha_0, \beta)$  un couple de réflexions d'axes orthogonaux bordant  $\mathcal{P}_\Pi$ , avec  $\alpha_0$  générique et  $\beta$  générique ou non. Si  $\Gamma$  est un sous-groupe sans torsion d'indice 4 de  $\Pi$ , on a  $\Pi = \Gamma \Pi \Gamma \alpha_0 \Pi \Gamma \beta \Pi \Gamma \alpha_0 \beta$ . Les polygones

$$\mathcal{P}_{\Pi^K} = \mathcal{P}_\Pi \cup \alpha_0(\mathcal{P}_\Pi) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P}_\Pi \cup \alpha_0(\mathcal{P}_\Pi) \cup \beta(\mathcal{P}_\Pi) \cup \alpha_0\beta(\mathcal{P}_\Pi) \quad (25)$$

forment des domaines fondamentaux pour l'action de  $\Pi^K$  et de  $\Gamma$ , respectivement (figure 7). Noter que  $\mathcal{Q}$  est indépendant de  $\Gamma$ .

Pour commencer, nous étudions la torsion du groupe générique  $\Pi_{\text{gen}}$  (qui coïncide avec  $\Pi$  si  $\text{Is}(f)$  est trivial). En remplaçant  $\Pi$  par  $\Pi_{\text{gen}}$ , on définit des indices  $\nu_{\text{gen}}$  et  $\nu_{\text{gen}}^K$  analogues à  $\nu$  et  $\nu^K$ . Remarquer que  $\Pi_{\text{gen}}^+ = \Pi_{\text{gen}}^K$ . Soit  $\pi_0(\mathcal{G}_f)$  l'ensemble des composantes connexes du graphe  $\mathcal{G}_f = (S, \mathfrak{E})$ . Quand  $\mathcal{G}_f$  est fini, on pose  $\ell_{\text{gen}} = |\pi_0(\mathcal{G}_f)|$  et  $k_{\text{gen}} = |\mathfrak{E}|$ . Le résultat suivant donne en particulier l'indice minimal quand  $\text{Is}(f)$  est trivial.

**PROPOSITION 4.22** (indice minimal générique). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini et admettant des selles ( $\mathfrak{E} \neq \emptyset$ ). Alors on a  $\nu_{\text{gen}} = \nu_{\text{gen}}^K = 4$ . De plus, les sous-groupes réalisant  $\nu_{\text{gen}}$  (resp.  $\nu_{\text{gen}}^K$ ) sont exactement les noyaux des morphismes  $\omega : \Pi_{\text{gen}} \rightarrow \mu_2^2$  (resp.  $\rho : \Pi_{\text{gen}}^K \rightarrow \mu_2$ ) satisfaisant (24) (resp. (23)); ces morphismes  $\rho$  correspondent bijectivement à  $\mu_2^\mathcal{X}$  avec  $\mathcal{X} = \pi_0(\mathcal{G}_f) \setminus \{*\}$ . Quand  $\mathcal{G}_f$  est fini, le groupe  $\Pi_{\text{gen}}$  admet  $2^{k_{\text{gen}}-1} 3^{\ell_{\text{gen}}-1}$  sous-groupes sans torsion d'indice 4, tous distingués, dont  $2^{\ell_{\text{gen}}-1}$  sont inclus dans  $\Pi_{\text{gen}}^K$ .*

*Preuve.* On identifie comme plus haut  $\Pi_{\text{gen}}$  à un groupe de réflexions du plan hyperbolique  $\mathbf{H}$  (proposition 4.13), de polygone fondamental  $\mathcal{P}_0$ . En considérant l'action sur  $\mathbf{H}$ , on voit que tout élément de torsion de  $\Pi_{\text{gen}}$  est conjugué à un générateur  $\gamma$  ( $\gamma \in S$ ) ou à un elliptique  $\alpha\beta \in \Pi_{\text{gen}}^+$  avec  $\{\alpha, \beta\} \in \mathfrak{E}$ . Par suite, si un morphisme  $\omega : \Pi_{\text{gen}} \rightarrow \mu_2^2$  satisfait (24), alors  $\text{Ker } \omega$  est sans torsion et d'indice 4. Inversement, comme  $\Pi_{\text{gen}}$  est engendré par des involutions, tout sous-groupe sans torsion d'indice 4 est de cette forme, lemme 4.16. On construit aisément de tels morphismes  $\omega$  (voir ci-dessous). Sachant que  $\nu_{\text{gen}} \geq 4$  (remarque 4.17), on



conclut que  $\nu_{\text{gen}} = 4$ . Enfin, la correspondance entre sous-groupes réalisant  $\nu_{\text{gen}}^K$  et caractères  $\rho : \Pi_{\text{gen}}^+ \rightarrow \mu_2$  vérifiant (23) est immédiate puisque (23) équivaut ici à l'absence de torsion dans le noyau  $\text{Ker } \rho$ .

Il reste à donner une description de tous les morphismes  $\omega$  et  $\rho$  qui satisfont respectivement (24) et (23). Fixons une paire  $\{\alpha_0, \beta_0\} \in \mathfrak{E}$ . Les noyaux  $\text{Ker } \omega$  correspondent aux morphismes  $\omega$  modulo composition par un automorphisme du groupe  $\mu_2^2$ . On normalise  $\omega$  en fixant les valeurs (mutuellement distinctes) de  $\omega(\alpha_0)$ ,  $\omega(\beta_0)$  et  $\omega(\alpha_0\beta_0)$ . Si  $\Pi_{\text{gen}}^2$  désigne le sous-groupe engendré par les carrés, les morphismes  $\Pi_{\text{gen}} \rightarrow \mu_2^2$  sont en bijection avec les morphismes de  $\Pi_{\text{gen}}/\Pi_{\text{gen}}^2 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^{(S)}$  sur  $\mu_2^2$ . Soit  $C_0 = (S_0, \mathfrak{E}_0) \in \pi_0(\mathcal{G}_f)$  la composante de  $\alpha_0$ . Pour tout  $C = (S_C, \mathfrak{E}_C) \in \pi_0(\mathcal{G}_f) \setminus \{C_0\}$ , on fixe (arbitrairement) un sommet  $\gamma_C \in S_C$ . Les morphismes  $\omega$  sont alors déterminés, par composante, comme suit : d'abord  $\omega(\gamma_C)$  (3 choix), ensuite  $\omega(\gamma)$  pour  $\gamma \in S_C$  par récurrence à partir de  $\omega(\gamma_C)$  dans la composante  $C$  (deux choix pour le sommet voisin, donc  $2^{\mathfrak{E}_C}$  choix), et de même pour  $C_0$  avec seulement  $2^{\mathfrak{E}_0 \setminus \{*\}}$  choix puisque  $\omega(\alpha_0)$  et  $\omega(\beta_0)$  sont déjà fixés. Il reste à dénombrer les sous-groupes réalisant l'indice  $\nu_{\text{gen}}^K$ . L'inclusion  $\text{Ker } \omega \subset \Pi_{\text{gen}}^K = \Pi_{\text{gen}}^+$  équivaut à la condition

$$\omega(\gamma) \in \{\omega(\alpha_0), \omega(\beta_0)\} \quad (\gamma \in S).$$

Dans ce cas la restriction de  $\omega$  à  $\Pi_{\text{gen}}^+$  est à valeurs dans le sous-groupe engendré par  $\omega(\alpha_0\beta_0)$  et définit un caractère  $\rho : \Pi_{\text{gen}}^+ \rightarrow \mu_2$ , vérifiant (23) si  $\omega$  vérifie (24). Par la condition additionnelle ci-dessus, les  $\omega(\gamma)$  pour  $\gamma \in S_C$  ( $C \in \pi_0(\mathcal{G}_f) \setminus \{C_0\}$ ) sont entièrement déterminés par  $\omega(\gamma_C)$  (avec deux choix pour  $\omega(\gamma_C)$ ), et les  $\omega(\gamma)$  sont déterminés pour tout  $\gamma \in C_0$ . La description topologique des quotients par  $\text{Ker } \omega \subset \Pi_{\text{gen}}^+$  sera donnée dans la preuve de la proposition 4.28.  $\square$

Dans la suite, nous supposons que le groupe  $\text{Is}(f)$  n'est pas trivial. Les quotients provenant de l'action simpliciale de  $\text{Is}(f)$  sur le graphe de contiguïté  $\mathcal{G}_f = (S, \mathcal{E})$  sont notés  $[\mathcal{G}_f]_f$ ,  $[S]_f$ ,  $[\mathcal{E}]_f$ ,  $[\pi_0(\mathcal{G}_f)]_f$  ; quand  $[\mathcal{G}_f]_f$  est fini, on pose

$$\ell = \chi([\mathcal{G}_f]_f) \quad \text{et} \quad k = |[\mathcal{E}]_f|, \quad (26)$$

qui désignent respectivement la caractéristique d'Euler du quotient  $[\mathcal{G}_f]_f$  et le nombre de selles comptées modulo  $\text{Is}(f)$ . Par définition, on a la relation  $k + \ell = |[S]_f|$  (nombre de composantes de  $\{f \neq 0\}$  modulo  $\text{Is}(f)$ ). Topologiquement,  $[\mathcal{G}_f]_f$  est une union disjointe de segments, ou un cercle si  $\mathcal{G}_f$  est connexe avec  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$ . Hormis ce dernier cas particulier (où  $\ell = 0$ ), l'entier  $\ell$  est aussi le nombre de composantes de  $\mathcal{G}_f$  modulo  $\text{Is}(f)$ .

On traite maintenant le cas où  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . D'après la proposition 4.13, le groupe  $\Pi$  est engendré par  $\Pi_{\text{gen}}$  et un elliptique non générique  $s$  pour le cas (1a) ou une réflexion non générique  $\sigma$  pour le cas (1b). Cette involution non générique fixe  $\mathcal{P}_0$  (polygone fondamental de  $\Pi_{\text{gen}}$ ). De plus, dans le cas (1b),  $\text{Is}(f)$  fixe un unique sommet de  $\mathcal{G}_f$  noté  $\alpha_0$ .

**PROPOSITION 4.23** (indice minimal,  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini et telle que  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Dans le cas (1a), on suppose de plus que  $E^u$  admet des selles. Alors on a  $\nu = \nu^K = 4$ . Les sous-groupes réalisant  $\nu$  (resp.  $\nu^K$ ) sont les noyaux des morphismes  $\omega : \Pi \rightarrow \mu_2^2$  (resp.  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$ ) satisfaisant les conditions (24) (resp. (23)), auxquelles il faut ajouter, suivant les cas :*

$$(1a) \quad \omega(s) \in \Delta = \mu_2^2 \setminus \{(1, 1)\},$$

$$(1b) \quad \omega(\{\alpha_0, \sigma, \alpha_0\sigma\}) = \Delta \quad (\text{resp. } \rho(\sigma) = -1).$$

*Les morphismes  $\rho$  correspondent bijectivement à  $\mu_2^{\mathfrak{X}}$  avec  $\mathfrak{X} = [\pi_0(\mathcal{G}_f)]_f, [\pi_0(\mathcal{G}_f)]_f \setminus \{*\}$  dans les cas (1a), (1b). Si  $\mathcal{G}_f$  est fini, le groupe  $\Pi$  comprend  $2^{k-1}3^\ell$  (resp.  $2^k3^{\ell-1}$ ) sous-groupes sans torsion d'indice 4, tous distingués, dont  $2^\ell$  (resp.  $2^{\ell-1}$ ) sont inclus dans  $\Pi^K$ .*

*Preuve.* Dans le cas (1a), on choisit une géodésique (arbitraire)  $\xi$  passant par le centre de  $s$  et ne rencontrant pas le bord  $\partial\mathcal{P}_0$ . Dans le cas (1b), on note  $\xi$  l'axe de  $\sigma$ . La géodésique  $\xi$  partage  $\mathcal{P}_0$  en deux moitiés isométriques formant un domaine fondamental pour  $\Pi$ ; on choisit l'une d'elle, notée  $\mathcal{P}_\Pi$ . Pour (1a), on fixe une paire  $\{\alpha_0, \beta_0\} \in \mathfrak{E}$  qui représente un sommet de  $\partial\mathcal{P}_\Pi$  (comme graphe,  $\partial\mathcal{P}_0$  est dual à  $\mathcal{G}_f$ ). Pour (1b), on rappelle que  $\alpha_0\sigma$  est elliptique. Soit  $\mathcal{Q}$  défini par (25) avec  $\alpha = \alpha_0$  et  $\beta = \beta_0$  pour (1a),  $\beta = \sigma$  pour (1b). La fin de la preuve est une adaptation immédiate de celle de la proposition 4.22. Le polygone  $\mathcal{Q}$  fournit un domaine fondamental pour tout sous-groupe sans torsion d'indice 4 et le lemme 4.16 s'applique. Inversement, la torsion de  $\Pi$  étant connue, les noyaux des morphismes  $\omega$  et  $\rho$  qui satisfont aux conditions de l'énoncé définissent des sous-groupes sans torsion d'indice 4. Pour le dénombrement des sous-groupes  $\Gamma$ , le bord  $\partial\mathcal{P}_\Pi$  ne fait intervenir que les éléments de  $\mathcal{G}_f$  modulo l'action de  $\text{Is}(f)$ ; dans le cas (1a), il y a une composante de bord additionnelle  $\xi$  (sans sommet), et dans le cas (1b) la paire  $\{\alpha_0, \sigma\}$  joue le rôle de  $\{\alpha_0, \beta_0\}$ . Noter cependant que si  $\Gamma$  est inclus dans  $\Pi^K$ , la surface  $\mathbf{H}/\Gamma$  n'est pas orientable (si  $\mathfrak{E} \neq \emptyset$ ) car les éléments  $\alpha_0 s$  et  $\alpha_0 \sigma \gamma$  ( $\gamma \in S$ ) sont indirects (voir proposition 4.28).  $\square$

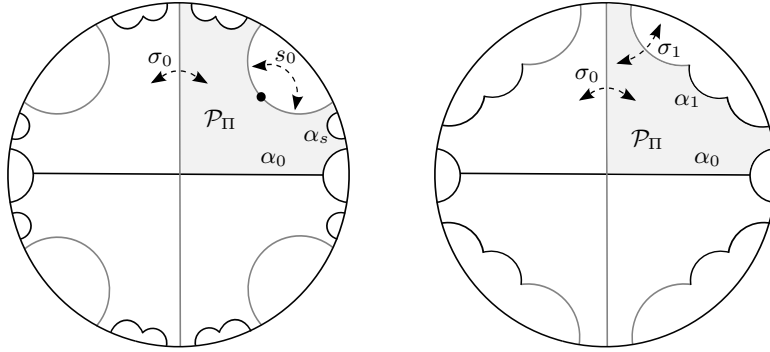


FIGURE 7 –  $E^u$  avec produits elliptiques, cas (3b) et  $(3c^{+u})$

Quand  $\text{Is}(f)$  est isomorphe à  $D_\infty$ , les générateurs non génériques de  $\Pi$  fixant  $\mathcal{P}_0$  seront notés respectivement  $s_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $s_0$  et  $\sigma_0$ ,  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1$ ) dans les cas (3a), (3b), (3c). Chaque réflexion non générique  $\sigma_i$  fixe un unique sommet  $\alpha_i$  de  $\mathcal{G}_f$ .

**PROPOSITION 4.24** (indice minimal,  $\text{Is}(f) \simeq D_\infty$ ). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini et telle que  $\text{Is}(f) \simeq D_\infty$ . Dans le cas (3a), on suppose de plus que  $E^u$  admet des selles. Alors on a  $\nu = \nu^K = 4$ . Les sous-groupes réalisant  $\nu$  (resp.  $\nu^K$ ) sont les noyaux des morphismes  $\omega : \Pi \rightarrow \mu_2^2$  (resp.  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$ ) satisfaisant les conditions (24) (resp. (23)), auxquelles il faut ajouter, suivant les cas :*

- (3a)  $\omega(s_i) \in \Delta = \mu_2^2 \setminus \{(1, 1)\}$  pour  $i = 0, 1$ ,
- (3b)  $\omega(s_0) \in \Delta$  et  $\omega(\{\alpha_0, \sigma_0, \alpha_0\sigma_0\}) = \Delta$  (resp.  $\rho(\sigma_0) = -1$ ),
- (3c)  $\omega(\{\alpha_i, \sigma_i, \alpha_i\sigma_i\}) = \Delta$  (resp.  $\rho(\sigma_i) = -1$ ) pour  $i = 0, 1$ .

*L'ensemble  $[\mathcal{G}_f]_f$  est fini et, dans le cas (3a) (resp. (3b), (3c)), le groupe  $\Pi$  admet  $2^{k-1}3^{\ell+1}$  (resp.  $2^k3^\ell$ ,  $2^{k+1}3^{\ell-1}$ ) sous-groupes sans torsion d'indice 4, tous distingués, dont  $2^{\ell+1}$  (resp.  $2^\ell$ ,  $2^{\ell-1}$ ) sont inclus dans  $\Pi^K$ .*

*Preuve.* On obtient un domaine fondamental  $\mathcal{P}_\Pi$  en découpant  $\mathcal{P}_0$  par deux géodésiques  $\xi, \xi'$  associées aux générateurs non génériques (involutions elliptiques ou réflexions, suivant les cas, voir figure 7). Comme précédemment, les sous-groupes réalisant  $\nu$  et  $\nu^K$  sont d'indice 4, tous distingués (lemme 4.16) et décrits par les morphismes  $\omega$  et  $\rho$  vérifiant les conditions de l'énoncé qui éliminent la torsion dans les noyaux. La construction de ces morphismes

et leur décompte quand  $[\mathcal{G}_f]_f$  est fini s'effectuent comme plus haut (preuves des propositions 4.22 et 4.23), en explicitant des générateurs de  $\Pi$  (pour  $\omega$ ) et de  $\Pi^K$  (pour  $\rho$ ) grâce au théorème de Poincaré. Soit  $S_1$  l'ensemble des  $\alpha \in S$  dont les axes bordent  $\mathcal{P}_\Pi$ . Dans le cas (3a), on fixe une paire contiguë  $\{\alpha_0, \beta_0\}$  avec  $\alpha_0, \beta_0 \in S_1$ ; dans les cas (3b) et (3c), on remplace  $\beta_0$  par  $\beta = \sigma_0$ . Le groupe  $\Pi^K$  est engendré par les  $(\alpha_0\alpha)_{\alpha \in S_1}$  et  $\delta_0, \delta_1$  avec  $(\delta_0, \delta_1) = (\alpha_0 s_0, \alpha_0 s_1), (\sigma_0, \alpha_0 s_1), (\sigma_0, \sigma_1)$  pour (3a), (3b), (3c). Si  $\alpha, \alpha' \in S_1$  sont contiguës, on doit avoir  $\rho(\alpha_0\alpha)\rho(\alpha_0\alpha') = \rho(\alpha\alpha') = -1$ . Ainsi,  $\rho(\alpha_0\alpha)$  est imposé si  $\alpha \in S_1$  appartient à la composante de  $\alpha_0$ , et  $\rho$  est déterminé par une valeur pour chacune des autres composantes génériques de  $\partial\mathcal{P}_\Pi$ . De plus  $\rho(\alpha_0 s_i)$  est arbitraire, d'où l'assertion sur les morphismes  $\rho$ . Pour compter les morphismes  $\omega$  (normalisés sur  $\{\alpha_0, \beta, \alpha_0\beta\}$ ,  $\beta = \beta_0$  ou  $\sigma_0$  suivant les cas), on procède comme pour la preuve du cas générique (proposition 4.22). Dans le cas (3c), noter que  $\Pi$  est aussi un groupe de réflexions, les paires  $\{\alpha_i, \sigma_i\}$  ( $i = 0, 1$ ) jouant le rôle de selles; il se comporte (pour  $\omega$ ) comme un groupe générique avec  $\ell$  composantes et  $k + 2$  selles, voir proposition 4.22.  $\square$

PROPOSITION 4.25 (indice minimal,  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$ ). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini, telle que  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$  et admettant des selles. On a alors  $\nu = \nu^K = 4$ . Les sous-groupes réalisant  $\nu^K$  correspondent bijectivement aux caractères  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$  vérifiant (23). Plus précisément,  $[\mathcal{G}_f]_f$  étant fini,*

- (1) *si  $\mathcal{G}_f$  n'est pas connexe, il y a  $2^{\ell+1}$  sous-groupes  $\text{Ker } \rho$ , dont  $2^\ell$  distingués dans  $\Pi$  et  $2^\ell$  échangés par réflexion générique,*
- (2) *si  $\mathcal{G}_f$  est connexe, l'indice  $\nu^K$  est réalisé par 2 sous-groupes, distingués dans  $\Pi$ .*

*Preuve.* Le groupe  $\Pi$  est engendré par  $\Pi_{\text{gen}}$  et un élément  $h_0$  d'ordre infini, direct ou non, qui laisse invariant le polygone fondamental  $\mathcal{P}_0$  de  $\Pi_{\text{gen}}$  (proposition 4.13). Si  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental de  $h_0$  bordé par deux géodésiques, alors  $\mathcal{P}_\Pi = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_0$  est un domaine pour  $\Pi$  qui pave  $\mathcal{P}_0$ . On choisit  $\partial\mathcal{D}$  disjoint de  $\partial\mathcal{P}_0$  si  $\mathcal{G}_f$  n'est pas connexe et orthogonal à  $\partial\mathcal{P}_0$  sinon, de sorte que les composantes de  $\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{P}_0$  représentent  $[\pi_0(\mathcal{G}_f)]_f$ . Soit  $\{\alpha_0, \beta_0\}$  une paire de réflexions contiguës dont les axes bordent  $\mathcal{P}_\Pi$ . On considère les polygones  $\mathcal{P}_{\Pi^K}$  et  $\mathcal{Q}$  définis par (25) avec  $\beta = \beta_0$ . Contrairement aux cas précédents, le lemme 4.16 ne s'applique pas car (ii) n'est pas *a priori* vérifiée :  $\mathcal{Q}$  est un domaine fondamental pour tout sous-groupe  $\Gamma$  sans torsion d'indice 4 et on trouve  $h_0, \alpha_0 h_0, \beta_0 h_0, \alpha_0 \beta_0 h_0$  parmi les générateurs potentiels de  $\Gamma$ . Pour simplifier, nous cherchons seulement les  $\Gamma \subset \Pi^K = \Pi^+$  via les caractères  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$ . D'après le théorème de Poincaré,  $\Pi^K$  est engendré par les identifications des côtés de  $\mathcal{P}_{\Pi^K}$ , à savoir les  $\alpha_0\alpha$  ( $\alpha \in S$  bordant  $\mathcal{P}_\Pi$ ) ainsi que  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$  dans le cas pair, ou  $\alpha_0 h_0$  et  $h_0 \alpha_0$  dans le cas impair. Comme les éléments de torsion de  $\Pi$  sont ceux de  $\Pi_{\text{gen}}$ , l'absence de torsion dans  $\text{Ker } \rho$  équivaut à (23). De plus  $\rho(\alpha\alpha_0) = \rho(\alpha_0\alpha)$ , donc  $\text{Ker } \rho$  est distingué dans  $\Pi$  si et seulement si  $\rho(h_0) = \rho(\alpha_0 h_0 \alpha_0)$  pour le cas pair,  $\rho(\alpha_0 h_0) = \rho(h_0 \alpha_0)$  pour le cas impair.

La construction des caractères  $\rho$  est analogue à celle du cas générique, mais il convient de distinguer deux cas. Si  $\mathcal{G}_f$  n'est pas connexe, les valeurs de  $\rho(h_0)$  et  $\rho(\alpha_0 h_0 \alpha_0)$  (resp.  $\rho(\alpha_0 h_0)$  et  $\rho(h_0 \alpha_0)$ ) pour le cas pair (resp. impair) peuvent être arbitraires, d'où l'assertion (1). Si  $\mathcal{G}_f$  est connexe, alors  $\ell = 0$  et  $k$  est pair (les zéros de  $f$  sont isolés, en nombre pair dans chaque période). Les côtés de  $\mathcal{P}_0$  sont alternativement de type espace et temps : le nombre de sommets entre les axes de  $\alpha_0$  et de  $h_0 \alpha_0 h_0^{-1}$  est pair. Par suite  $\alpha_0 h_0 \alpha_0 h_0^{-1}$  est le produit d'un nombre pair d'elliptiques génériques et on a  $\rho(h_0) = \rho(\alpha_0 h_0 \alpha_0)$ . Le noyau  $\Gamma = \text{Ker } \rho$  est distingué dans  $\Pi$  et on trouve deux possibilités, suivant que  $h_0 \in \Gamma$  ou que  $\alpha_0 \beta_0 h_0 \in \Gamma$ .  $\square$

Nous précisons maintenant le nombre et la topologie des quotients lisses minimaux de  $E^u$  portant un champ de Killing, dans le cas où le graphe  $\mathcal{G}_f$  est fini modulo l'action de

$\text{Is}(f)$ . Voici d'abord la description du quotient  $\mathbf{H}/\Pi^K$  comme surface « orbifold ». Il s'agit d'une surface compacte  $\Sigma$  éventuellement à bord, avec un ensemble  $Ell$  de points elliptiques d'ordre 2, et privée d'un ensemble fini  $P$  de points, désignés par « pointes » ; on pose  $p_{\text{int}} = |P \cap (\Sigma \setminus \partial\Sigma)|$  et  $p_{\partial} = |P \cap \partial\Sigma|$  (pointes internes ou pointes au bord). Géométriquement, les points elliptiques de  $E^u/G^K$  sont des « demi-selles ». On rappelle que les entiers  $\ell$  et  $k$  sont définis par (26).

**PROPOSITION 4.26** (structure orbifold de  $E^u/G^K$ ). *Soit  $E^u$  non élémentaire. On suppose que  $\mathcal{G}_f/\text{Is}(f)$  est fini. La topologie orbifold du quotient  $E^u/G^K$  est donnée par la table 1, où les surfaces compactes **S**, **P**, **D**, **T**, **K**, **M** et **A** désignent respectivement la sphère, le plan projectif, le disque, le tore, la bouteille de Klein, le ruban de Möbius et l'anneau.*

cas	$\Sigma$	$ Ell $	$p_{\text{int}}$	$p_{\partial}$	cas	$\Sigma$	$ Ell $	$p_{\text{int}}$	$p_{\partial}$
(0)	<b>S</b>	$k$	$\ell$		(2 <sup>-</sup> )	<b>T</b>	$k$	$\ell$	
(1a)	<b>P</b>	$k$	$\ell$		(3a)	<b>K</b>	$k$	$\ell$	
(1b)	<b>D</b>	$k$	$\ell - 1$	1	(3b)	<b>M</b>	$k$	$\ell - 1$	1
(2 <sup>+u</sup> )	<b>S</b>	$k$	$\ell + 2$		(3c <sup>+u</sup> )	<b>D</b>	$k$	$\ell - 1$	2
(2 <sup>+b</sup> )	<b>T</b>	$k$	$\ell$		(3c <sup>+b</sup> )	<b>A</b>	$k$	$\ell - 2$	2

TABLE 1 – Structure orbifold de  $E^u/G^K$

*Preuve.* On procède au cas par cas à partir des domaines fondamentaux pour l'action de  $\Pi^K$  sur  $\mathbf{H}$  décrits dans les preuves ci-dessus. On remarquera que les cas (2<sup>+b</sup>) et (2<sup>-</sup>) ont ici le même comportement.  $\square$

**Remarque 4.27.** La surface  $E^u/G_{\text{gen}}^K$ , privée de ses points elliptiques, est isométrique à la surface  $X'$  construite à la remarque 3.4 (pour un choix convenable des  $\sigma_{\alpha}$ ).

Passons à la description topologique des quotients lisses minimaux de  $E^u$ , c'est-à-dire des quotients par les sous-groupes sans torsion d'indice minimal  $\nu^K$  dans  $G^K$ , à isométrie près. Il revient au même de décrire les  $\Gamma$  réalisant l'indice minimal  $\nu^K$ , à conjugaison près dans le groupe  $\Pi$ . En effet, comme  $\text{Is}^K(E^u)$  centralise  $\text{Is}^0(E^u)$ , deux sous-groupes de  $G^K$  conjugués dans  $\text{Is}(E^u)$  le sont aussi dans  $G^K$ . La topologie de la surface  $\mathbf{H}/\Gamma$  sera codée par la signature  $(g;p)^{\pm}$  de  $\Gamma$ , où  $g$  désigne le genre,  $p$  le nombre de bouts (pointes) et avec  $\pm$  pour orientable ou non.

**PROPOSITION 4.28** (topologie des petits quotients de  $E^u$ ). *Soit  $E^u$  non élémentaire. On suppose que  $\mathcal{G}_f/\text{Is}(f)$  est fini. Si  $\nu^K = 2$  ( $E^u$  n'a pas de produits elliptiques), la topologie de  $E^u/G^K$  est décrite à la table 1, cas (0), (1a), (2) et (3a) avec  $k = 0$ . Si  $\nu^K = 4$ , la topologie des sous-groupes sans torsion d'indice 2 dans  $\Pi^K$  est donnée par la table 2 suivante. Leur nombre, à conjugaison près dans  $\Pi$  et à topologie fixée, est également déterminé (colonne #). Pour le cas (2), on pose  $N_j^{\ell} = \sum_{i=0}^2 \binom{\ell}{j-i}$ ; le cas (2<sup>+b</sup>) est explicité à la proposition complémentaire 4.30.*

*Preuve.* Les sous-groupes  $\Gamma$  cherchés correspondent évidemment aux revêtements doubles orbifoldes  $Y$  de  $X = \mathbf{H}/\Pi^K$ , dont la structure est explicitée à la proposition 4.26. Le paramètre  $j$  représente le nombre de pointes internes à  $X$  au-dessus desquelles  $Y \rightarrow X$  est ramifié. Quand  $j$  croît, le genre de  $Y$  croît tandis que le nombre de pointes de  $Y$  décroît, la caractéristique d'Euler restant constante. Le lemme ci-dessous permet de déterminer le

Is( $f$ )	$\chi(\Gamma)$	paramètre	signature	#	total
trivial (0) $k > 0$	$4 - k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell$ $k + j$ pair (*)	$(\frac{k+j}{2} - 1; 2\ell - j)^+$	$\binom{\ell}{j}$	$2^{\ell-1}$
$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (1a) $k > 0$	$2 - k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell$ et (*)	$(k + j; 2\ell - j)^-$	$2\binom{\ell}{j}$	$2^\ell$
(1b) $k + j = 0$	$3 - 2\ell$	$k = 0$ et $j = 0$	$(0; 2\ell - 1)^+$	1	
$k + j > 0$	$3 - 2\ell - k$	$0 \leq j \leq \ell - 1$	$(k + j; 2\ell - j - 1)^-$	$\binom{\ell-1}{j}$	$2^{\ell-1}$
$\mathbf{Z}, k > 0$ ( $2^{+u}$ ) $\ell = 0$	$-k$	$j = 0, 2$	$(\frac{k+j}{2} - 1; 4 - j)^+$	2	2
$\ell \geq 1$	$-k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell + 2$ et (*)	$(\frac{k+j}{2} - 1; 2\ell + 4 - j)^+$	$N_j^\ell$	$3 \cdot 2^{\ell-1}$
( $2^{+b}$ )	$-k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell$ et (*)	$(\frac{k+j}{2} + 1; 2\ell - j)^+$	4.30	$3 \cdot 2^{\ell-1}$
( $2^-$ )	$-k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell$ et (*)	$(\frac{k+j}{2} + 1; 2\ell - j)^+$	$3\binom{\ell}{j}$	$3 \cdot 2^{\ell-1}$
$D_\infty$ (3a) $k > 0$	$-k - 2\ell$	$0 \leq j \leq \ell$ et (*)	$(k + j + 2; 2\ell - j)^-$	$4\binom{\ell}{j}$	$2^{\ell+1}$
(3b)	$1 - 2\ell - k$	$0 \leq j \leq \ell - 1$	$(k + j + 2; 2\ell - j - 1)^-$	$2\binom{\ell-1}{j}$	$2^\ell$
(3c $^{+u}$ )	$2 - 2\ell - k$	$0 \leq j \leq \ell - 1$	$(k + j; 2\ell - j)^-$	$\binom{\ell-1}{j}$	$2^{\ell-1}$
(3c $^{+b}$ )	$2 - 2\ell - k$	$0 \leq j \leq \ell - 2$	$(k + j + 2; 2\ell - j - 2)^-$	$2\binom{\ell-2}{j}$	$2^{\ell-1}$

TABLE 2 – Topologie des petits quotients de  $E^u$  ( $\nu^K = 4$ )

nombre et la topologie des sous-groupes  $\Gamma$  quand  $j$  est fixé. On retrouve le nombre total de sous-groupes, déjà connu grâce aux caractères  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$  (propositions 4.22-4.25). Dans le cas (2) avec  $\ell \geq 1$ , les sous-groupes  $\Gamma$  réalisant  $\nu^K$  ne sont pas tous distingués. Pour ( $2^{+u}$ ),  $E^u/G^K$  comprend 2 pointes spéciales associées à  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$ , et  $\Gamma$  est distingué si et seulement si elles sont simultanément ramifiées ou non. À topologie fixée, c'est-à-dire  $j$  fixé ( $0 \leq j \leq \ell + 2$ ,  $k + j$  pair), le nombre de sous-groupes  $\Gamma$  à conjugaison près est donc  $N_j^\ell = \binom{\ell}{j} + \binom{\ell}{j-1} + \binom{\ell}{j-2}$ , avec la convention  $\binom{\ell}{m} = 0$  si  $m(\ell - m) < 0$ ; noter que la somme sur  $j$  de chacun des trois termes de  $N_j^\ell$  vaut  $2^{\ell-1}$ . Dans le cas ( $2^{+b}$ ), la condition pour que  $\Gamma$  soit distingué s'écrit  $\rho(h_0 \alpha_0) = \rho(\alpha_0 h_0)$ . Soit  $\Sigma$  la surface de la table 1. Le couple  $(h_0 \alpha_0, \alpha_0 h_0)$  induit une base de l'homologie  $H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$ . On peut fixer arbitrairement  $\rho(h_0 \alpha_0)$  et  $\rho(\alpha_0 h_0)$  (4 choix), et indépendamment  $j$  pointes ramifiées avec  $k + j$  pair ( $\binom{\ell}{j}$  choix). La proportion de sous-groupes  $\Gamma$  distingués, c'est-à-dire  $1/2$ , est donc indépendante de  $j$ .  $\square$

LEMME 4.29 (revêtements doubles orbifoldes). *Soit  $X$  une surface orbifold compacte, de type topologique fini, avec ou sans bord et possédant  $N \geq 1$  points elliptiques d'ordre 2. On note  $g_X$  le genre de  $X$  et  $m \geq 0$  le nombre de composantes de  $\partial X$ . Si  $m = 0$ , on suppose de plus que  $N$  est pair. Soit  $q = \kappa g_X + \max(m - 1, 0)$  avec  $\kappa = 2$  si  $X$  est orientable,  $\kappa = 1$  sinon. Alors il existe exactement  $2^q$  revêtements doubles orbifoldes de  $X$  par des surfaces lisses  $Y$ , fermées et connexes. De plus, les surfaces  $Y$  sont toutes homéomorphes et*

- (1)  $Y$  est orientable, de genre  $2g_X + N/2 - 1$ , si  $X$  est orientable et sans bord,
- (2)  $Y$  est non orientable, de genre  $2\kappa g_X + N + 2m - 2$ , sinon.

*Preuve.* Soient  $x_1, \dots, x_N$  les points elliptiques. À partir de la présentation usuelle du groupe fondamental de  $X \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ , on trouve facilement les revêtements doubles connexes  $Z$  de  $X$  ramifiés en tous les points  $x_i$ . Noter que  $Z$  est orientable si et seulement si  $X$  l'est. Si  $\partial X = \emptyset$ , on prend  $Y = Z$ . Sinon, on définit  $Y$  en identifiant les points de  $\partial Z$  par l'involution du revêtement; vu la nature de celle-ci, cette opération produit automatiquement

une surface non orientable, même si  $X$  est orientable. Enfin, le genre de  $Y$  est déterminé par la caractéristique d'Euler orbifold de  $X$ .  $\square$

Nous nous concentrons maintenant sur le cas  $(2^{+b})$  (donc  $\ell \geq 2$ ). La surface  $\Sigma$  de la proposition 4.26 est homéomorphe au tore. On rappelle que si  $\rho : \Pi^K \rightarrow \mu_2$  est non trivial, le caractère distingué dans  $\Pi$  de  $\Gamma = \text{Ker } \rho$  se lit sur une paire d'éléments de  $\Pi^K$  (preuve de la proposition 4.25), nécessairement hyperboliques. Plus précisément, pour  $(2^{+b})$ , il s'agit de  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$ , dont les géodésiques fermées associées découpent le tore  $\Sigma$  en deux cylindres. Ainsi, les pointes et les points elliptiques de l'orbifold  $\mathbf{H}/\Pi^K$  se scindent en deux sous-ensembles de cardinaux respectifs  $\ell_1 \geq 1$ ,  $\ell_2 \geq 1$  pour les pointes ( $\ell_1 + \ell_2 = \ell$ ) et  $k_1$ ,  $k_2$  ( $k_1 + k_2 = k$ ) pour les elliptiques. Ces entiers se déduisent de  $f$ . Par exemple,  $k_1$  et  $k_2$  correspondent aux selles sur le bord d'un domaine fondamental  $\mathcal{P}$  pour  $\Pi$ , réparties suivant que le champ est rentrant dans  $\mathcal{P}$  ou sortant.

**PROPOSITION 4.30** (complément à 4.28). *Soit  $E^u$  non élémentaire, de type fini et telle que  $\text{Is}(f) \simeq \mathbf{Z}$ . On suppose que  $E^u$  est de type pair bilatère et admet des selles. Soit  $j = 0, \dots, \ell$  tel que  $k + j$  soit pair. À conjugaison près dans  $\Pi$ , le nombre  $n_j^\ell$  de sous-groupes d'indice 2 de  $\Pi^K$  avec  $\mathbf{H}/\Gamma$  homéomorphe à  $(\frac{k+j}{2} + 1; 2\ell - j)^+$  est donné par*

$$n_j^\ell = 2 \binom{\ell}{j} + 2 \sum^{**} \binom{\ell_1}{j_1} \binom{\ell - \ell_1}{j - j_1}$$

où la somme  $\sum^{**}$  est indexée par  $0 \leq j_1 \leq \ell_1$  avec  $k_1 + j_1$  pair.

*Preuve.* Comme nous l'avons observé plus haut, les courbes simples associées à  $h_0$  et  $\alpha_0 h_0 \alpha_0$  découpent le tore  $\Sigma$  en deux cylindres  $C_1$  et  $C_2$ . On peut choisir  $h'_0 \in \Pi^K$  tel que  $(h_0, h'_0)$  forme une base de l'homologie de  $\Sigma$ . Avec les notations précédentes, on peut choisir arbitrairement les valeurs du caractère  $\rho$  sur  $h_0$  et  $h'_0$  (4 choix). La topologie de  $\mathbf{H}/\Gamma$  ne dépend que du nombre de pointes ramifiées  $j$ , que l'on répartit en  $j = j_1 + j_2$  dans  $C_1$  et  $C_2$ . La condition  $\rho(h_0) = \rho(\alpha_0 h_0 \alpha_0)$  équivaut à  $k_1 + j_1$  est pair, d'où

$$n_j^\ell = 4 \sum^{**} \binom{\ell_1}{j_1} \binom{\ell - \ell_1}{j - j_1} + 2 \sum^* \binom{\ell_1}{j_1} \binom{\ell - \ell_1}{j - j_1},$$

où la somme  $\sum^{**}$  (resp.  $\sum^*$ ) est indexée par  $0 \leq j_1 \leq \ell_1$  avec  $k_1 + j_1$  pair (resp. impair). On en déduit facilement l'expression donnée dans l'énoncé.  $\square$

**Remarque 4.31.** Les propositions 4.20, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.28 et 4.30 sont valables, avec une preuve identique, pour toute partie  $S' \subset S$  localement finie et invariante. Il suffit de remplacer  $\nu$ ,  $\nu^K$  par des indices analogues relativement à  $G'$ , et  $k$ ,  $\ell$  par  $k'$ ,  $\ell'$  définis comme dans (26) par l'action de  $\text{Is}(f)$  sur le graphe de contiguïté  $\mathcal{G}'$  associé à  $S'$  ( $\ell' = 0$  n'est possible que si  $f$  est de type fini et avec  $S' = S$ ). On dira que  $E^u$  n'a pas de produits elliptiques *relativement à  $S'$*  si  $G'$  ne contient pas de sous-groupe isomorphe à  $\mu_2^2$ . Enfin, les types (pair, impair, etc) sont déjà définis relativement à  $S'$  (définition 4.18). Ainsi on pourra construire de nombreuses familles de quotients lisses, que  $f$  soit de type fini ou non ; on pourra prendre des parties strictes  $S'$  localement finies, arbitrairement grande si  $f$  n'est de type fini.

**PROPOSITION 4.32** (types topologiques à géométrie locale fixée). *Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$ . On suppose que l'ensemble  $\{f \neq 0\}$  possède au moins 4 composantes connexes. Alors pour toute surface  $\Sigma$  non compacte, orientable et de type topologique fini, la surface  $E^u$  admet un quotient difféomorphe à  $\Sigma$ .*



*Preuve.* Il suffit de réaliser les types topologiques  $(0, 2)^+$ ,  $(0, 3)^+$  et  $(1, 1)^+$ . En effet, on obtient évidemment les types  $(0, d+2)^+$  et  $(1, d)^+$  à partir de  $(0, 3)^+$  et  $(1, 1)^+$ , grâce à des revêtements cycliques de degré  $d \geq 1$  de  $(0, 2)^+$  et  $(1, 0)^+$ , respectivement. De plus, pour tout  $(g, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$  avec  $g \geq 2$ , il existe un revêtement du tore par la surface fermée de genre  $g$ , de degré  $d = 2g + p - 2 \geq 1$ , ayant une unique fibre ramifiée de cardinal  $p$ , voir [3, proposition 3.3]; on obtient donc le type  $(g, p)^+$  comme revêtement de  $(1, 1)^+$ .

Soit  $S' \subset S$  un sous-ensemble formé de 4 composantes connexes. D'après la proposition 4.13, l'action de  $G'_{\text{gen}} \subset G_{\text{gen}}$  sur  $E^u$  est conjuguée à celle d'un groupe de réflexions associé à un quadrilatère hyperbolique (l'invariance par  $\text{Is}(f)$  n'est pas nécessaire pour ce point). Ce groupe est engendré par 4 réflexions  $x_i$  (numérotées cycliquement), avec 5 possibilités pour les ordres de  $x_i x_{i+1}$ , en fonction du nombre et de la position des selles :  $(2, 2, 2, \infty)$ ,  $(2, 2, \infty, \infty)$ ,  $(2, \infty, 2, \infty)$ ,  $(2, \infty, \infty, \infty)$  et  $(\infty, \infty, \infty, \infty)$ . Pour réaliser  $(0, 2)^+$ , il suffit d'avoir deux axes de réflexions disjoints, ce qui évidemment toujours le cas. Ensuite, on pourra réaliser  $(1, 1)^+$  (resp.  $(0, 3)^+$ ) si l'on trouve un quadrilatère bordé par 4 axes disjoints (aucun ne séparant l'ensemble des 3 autres)  $uvu'v'$  (resp.  $uu'vv'$ ) de sorte que les paires  $\{u, u'\}$  et  $\{v, v'\}$  soient identifiées par des éléments directs sans points fixes de  $G'_{\text{gen}}$ . On vérifie aisément l'existence de tels quadrilatères dans chaque cas (illustration pour  $(2, \infty, 2, \infty)$  sur la figure 8).  $\square$

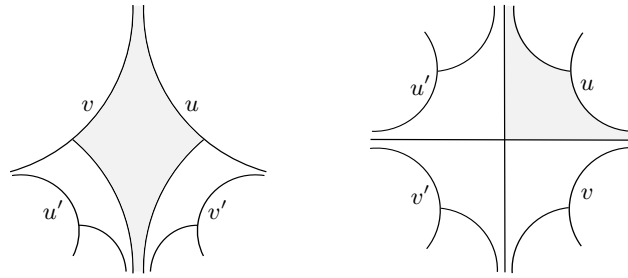


FIGURE 8 – Réalisation de  $(1, 1)^+$  et de  $(0, 3)^+$  pour  $(2, \infty, 2, \infty)$

*Remarque 4.33.* Soit  $f$  comme dans la proposition 4.32. Si de plus  $f$  possède une symétrie, alors on vérifie que  $E^u$  admet un quotient de type topologique  $(2, 1)^-$  (bouteille de Klein épointé). On prend cette fois  $S'$  invariante par  $\text{Is}(f)$ , dont le cardinal dépend du type de symétrie :  $\text{Card } S' = 4$  pour (1a), 5 pour (1b). Toujours d'après [3, proposition 3.3], la surface  $E^u$  admet un quotient non orientable de type  $(g, p)^-$  pour tout  $g \geq 2$  pair et tout  $p \geq 1$ . C'est le cas par exemple pour la géométrie de Clifton-Pohl.

#### 4.4 Ouverts de discontinuité

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Is}(E^u)$ . Un ouvert  $U$  de  $E^u$  stable par  $\Gamma$  est un ouvert de discontinuité pour  $\Gamma$  si l'action de  $\Gamma$  sur  $U$  est propre et discontinue. On dira que  $\Gamma$  est transverse au flot si  $\Gamma \cap \text{Is}^0(E^u)$  est trivial; il est clair que  $\Gamma$  est alors un sous-groupe discret de  $\text{Is}(E^u)$ . Rappelons que  $E^u = E_f^u$  est de type fini (définition 4.8) si l'ensemble des composantes connexes de  $\{f \neq 0\}$  est localement fini.

**PROPOSITION 4.34** (actions propres et discontinues sur  $E^u$ ). *Soit  $E^u$  de type fini (par exemple analytique) à courbure non constante et soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Is}(E^u)$ . Si  $\Gamma$  est transverse au flot, alors  $\Gamma$  agit proprement et discontinûment sur  $E^u$ . De plus, l'action de  $\Gamma$  est libre si et seulement si  $\Gamma$  est sans torsion.*

*Preuve.* D'après la la preuve de la proposition 4.9, lorsque l'action d'un groupe transverse au flot n'est pas propre, alors les axes des réflexions génériques de  $E^u$  s'accumulent quelque part. La fonction  $f$  étant supposée de type fini, un tel comportement n'est pas possible. De plus, tout point a un stabilisateur fini, donc trivial si  $\Gamma$  est sans torsion.  $\square$

PROPOSITION 4.35 (ouverts maximaux de discontinuité). *Soit  $E^u$  de type fini, soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Is}(E^u)$  et soit  $U$  un ouvert de discontinuité pour  $\Gamma$ , connexe et maximal. Si  $E^u$  n'est pas à courbure constante et si  $U \neq \emptyset$ , on a l'alternative suivante :*

- (1) *ou bien  $\Gamma$  est transverse au flot et  $U = E^u$ ,*
- (2) *ou bien  $\Gamma \cap \text{Is}^0(E^u) \simeq \mathbf{Z}$  et  $U/\Gamma$  est homéomorphe au cylindre, au ruban de Möbius, au tore ou à la bouteille de Klein. De plus  $U$  est simplement connexe (en particulier  $\Gamma \simeq \pi_1(U/\Gamma)$ ) et l'espace de ses feuilles est une géodésique maximale de  $\mathcal{E}^u$ . En particulier, si  $E^u$  n'est pas élémentaire, alors  $U \neq E^u$ .*

*Preuve.* Le groupe  $\Gamma \cap \text{Is}^0$  est un groupe cyclique distingué dans  $\Gamma$ , par conséquent s'il n'est pas trivial, alors les feuilles du champ  $K$  (induit par  $K^u$  sur  $U/\Gamma$ ) sont toutes fermées. La surface  $U/\Gamma$  admet donc un revêtement d'ordre au plus 2 qui est un fibré en cercle et l'espace des feuilles de  $K$  est séparé. Or cet espace est revêtu par l'espace des feuilles de la restriction de  $K^u$  à  $U$  et donc  $U$  est contenu dans la préimage d'une géodésique de  $\mathcal{E}^u$ . Si  $\Gamma \cap \text{Is}^0$  est trivial, alors  $\Gamma$  est transverse au flot et  $U = E^u$  d'après la proposition 4.34.  $\square$

COROLLAIRE 4.36. *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne connexe, analytique, saturée, maximale et sans selles à l'infini. Si flot de  $K$  n'est pas périodique alors  $X$  est un quotient d'une surface  $E^u$  associée à une certaine fonction analytique inextensible.*

*Preuve.* Une surface  $(X, K)$  analytique sans selles à l'infini est uniformisée par un ouvert  $U$  d'une surface  $E^u$  de type fini. Comme  $X$  est maximale,  $U$  est un ouvert maximal de discontinuité pour l'action du groupe d'holonomie.  $\square$

Quand  $E^u$  n'est pas de type fini, il peut exister des groupes d'isométries transverses au flot ayant des ouverts de discontinuité connexes et maximaux différents de  $E^u$ .

Exemple 4.37. Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . On suppose que les composantes de  $\{f \neq 0\} \cap \mathbf{R}^+$  s'accumulent uniquement sur 0, de sorte que  $g = f|_{]0, +\infty[}$  est de type fini. Si  $\Gamma$  est l'image d'une section de  $\text{Is}(E_g^u) \rightarrow \text{Is}(E_g^u)/\text{Is}^0(E_g^u)$ , alors d'après la proposition 4.9 (ou 4.34),  $\Gamma$  agit proprement et discontinûment sur  $E_g^u$ . Cependant,  $E_g^u$  s'identifie à un ouvert de  $E_f^u$  et  $\text{Is}(E_g^u) = \text{Is}_{\text{gen}}(E_g^u)$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Is}(E_f^u)$ , lemme 3.10. Le groupe  $\Gamma$  contient alors des réflexions génériques dont les axes s'accumulent dans  $E_f^u$ ; il n'agit donc pas proprement sur  $E_f^u$ . En fait,  $\Gamma$  n'agit proprement en aucun point du bord de  $E_g^u$  dans  $E_f^u$  :  $E_g^u$  est un ouvert de discontinuité maximal de  $E_f^u$ . On remarquera toutefois que la variété quotient est de classe  $[g]$  et non de classe  $[f]$ .

PROPOSITION 4.38. *Les tores localement modélés sur  $E^u$  sont uniformisables par des ouverts saturés simplement connexes de  $E^u$  dont la projection sur  $\mathcal{E}^u$  est une géodésique. Ils possèdent un champ de Killing. Il existe des tores localement modélés sur  $E^u$  si et seulement si  $f$  est périodique.*

*Preuve.* Soit  $T$  un tore localement modelé sur  $E^u$  et soit  $\mathcal{D}$  une développante associée. Si  $T$  est plat le résultat est clair, on suppose donc  $T$  non plat. Le champ de Killing  $K^u$  se relève par  $\mathcal{D}$  en un champ de Killing  $K$ . Le feuilletage *a priori* singulier associé à  $\tilde{K}$  est invariant par isométrie, il induit donc un feuilletage  $\mathcal{K}$  sur  $T$ . Par le théorème de Poincaré-Hopf, on voit que ce feuilletage ne peut pas être singulier puisque ses seules singularités

possibles sont des selles. D'après la proposition 2.21, ce feuilletage est transversalement riemannien. Les niveaux de la courbure étant saturés par ce feuilletage, on en déduit que toutes ses feuilles sont fermées. Il est donc orientable et  $\tilde{K}$  passe donc au quotient. Par conséquent,  $f$  est périodique,  $\mathcal{D}$  est injective (théorème 3.25) et son image se projette sur une géodésique de  $\mathcal{E}^u$ , proposition 4.35. Inversement, si  $f$  est périodique, le ruban  $R_f$  revêt un tore.  $\square$

Nous verrons (§5.1) que la géodésique de  $\mathcal{E}^u$  associée à l'uniformisation d'un tore  $T$  modelé sur  $E^u$  contient un invariant de nature combinatoire : la suite périodique des bandes de type II de  $T$ . Soit  $f$  périodique de type fini et soit  $G$  l'image d'une section de la suite exacte (18). Le groupe engendré par  $G^{K,+}$  et  $\Phi_K^1$  agit discontinûment et librement sur  $E^u$  privé de ses points selles. La variété quotient  $X$ , non séparée sauf si  $E^u$  est élémentaire, possède une propriété remarquable : *pour toute suite finie de bandes de type II extraite de  $R_f$ , il existe un tore  $T$  immergé dans  $X$  (via l'uniformisation) et admettant cette combinatoire prescrite.*

Nous étudions enfin l'espace des déformations des surfaces obtenues comme quotient d'un ouvert de discontinuité de  $E^u$ . Pour tout groupe  $\Gamma$ , notons  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$  l'ensemble des représentations de  $\Gamma$  dans  $\text{Is}(E^u)$ , muni de la topologie induite par  $\text{Is}(E^u)^\Gamma$ . Comme  $\text{Is}(E^u)$  est localement connexe, le groupe quotient  $\pi_0 \text{Is}(E^u) = \text{Is}(E^u) / \text{Is}^0(E^u)$  est discret. On rappelle que  $\pi_0 \text{Is}(E^u)$  est isomorphe à  $\Pi$  dans le cas non élémentaire et à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \text{Is}(f)$  dans le cas élémentaire. Par ailleurs, la projection de  $\text{Is}(E^u)$  sur  $\text{Is}(E^u) / \text{Is}^K(E^u) \simeq \mu_2$ , où  $\mu_2 = \{\pm 1\}$ , induit un caractère  $\bar{\chi} : \pi_0 \text{Is}(E^u) \rightarrow \mu_2$ . Soit  $p : \text{Is}(E^u) \rightarrow \pi_0 \text{Is}(E^u)$ . Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$ , on pose

$$\bar{\rho} = p \circ \rho \in \text{Hom}(\Gamma, \pi_0 \text{Is}(E^u)) \quad \text{et} \quad \chi_\rho = \bar{\chi} \circ \bar{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \mu_2).$$

Par continuité des projections de  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u)) \subset \text{Is}(E^u)^\Gamma$  sur les facteurs  $\text{Is}(E^u)$ , les morphismes  $\bar{\rho}$  et  $\chi_\rho$  ne dépendent que de la composante connexe  $C_\rho$  de  $\rho$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$ . En particulier, le caractère  $\chi_\rho$  définit une structure de  $\Gamma$ -module sur  $\mathbf{R}$  associée à  $C_\rho$ , que l'on notera simplement  $\mathbf{R}_\rho$ .

**PROPOSITION 4.39** (composantes et espaces de déformations). *Soit  $E^u$  à courbure non constante et soit  $\Gamma$  un groupe. Soit  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$  et soit  $C_\rho$  la composante connexe de  $\rho$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$ .*

- (1) *La composition par la projection de  $\text{Is}(E^u)$  sur  $\pi_0 \text{Is}(E^u)$  induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes de  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$  sur  $\text{Hom}(\Gamma, \pi_0 \text{Is}(E^u))$ .*
- (2) *L'espace des dérivations  $\text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$  agit simplement et transitivement sur la composante  $C_\rho$ . Celle-ci est homéomorphe à  $\text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$ .*
- (3) *L'action des conjugaisons de  $\text{Is}^0(E^u)$  sur  $C_\rho$  (déformations triviales) correspond à l'espace des dérivations principales  $\text{Der}^0(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$ . L'espace des déformations de  $\rho$  (modulo conjugaison par  $\text{Is}^0(E^u)$ ) est donc homéomorphe au  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $H^1(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$ .*
- (4) *On suppose que  $E^u$  est de type fini (par exemple analytique). Si  $\bar{\rho}$  est fidèle, alors toute représentation  $\rho' \in C_\rho$  est fidèle et l'action de  $\rho'(\Gamma)$  sur  $E^u$  est propre et discontinue ; de plus si  $\bar{\rho}(\Gamma)$  est sans torsion, alors  $\rho'(\Gamma)$  agit librement sur  $E^u$ .*

*Preuve.* Nous avons vu que la composition par  $p$  induit une application bien définie  $\theta$  de l'ensemble des composantes de  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \pi_0 \text{Is}(E^u))$ . Comme  $p$  est scindée (théorème 4.4 et proposition 4.3), l'application  $\theta$  est surjective. Notons  $\Phi^t$  le flot du champ  $K^u$ , qui identifie  $\text{Is}^0(E^u)$  avec  $\mathbf{R}$ . Soit  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{Is}(E^u))$  une représentation. Tout

élément  $d \in \text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$ , c'est-à-dire vérifiant  $d(\gamma\gamma') = d(\gamma) + \chi_\rho(\gamma)d(\gamma')$  pour  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ , définit une représentation  $\rho' \in C_\rho$  par

$$\rho'(\gamma) = \Phi^{d(\gamma)}\rho(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma). \quad (27)$$

Inversement, si  $p \circ \rho' = p \circ \rho$ , alors l'application  $d : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par (27) est l'unique dérivation qui envoie  $\rho$  sur  $\rho'$  (en particulier  $\rho' \in C_\rho$  et  $\theta$  est injective), d'où (1) et (2). Le choix de  $\rho \in C_\rho$  comme point base définit un homéomorphisme entre  $C_\rho$  et  $\text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho)$ . L'assertion (3) résulte de la relation

$$\Phi^s \rho(\gamma) \Phi^{-s} \rho(\gamma)^{-1} = \Phi^{s - \chi_\rho(\gamma)s} \quad (s \in \mathbf{R}, \gamma \in \Gamma).$$

Supposons que  $\bar{\rho}$  est fidèle. Si  $\rho' \in C_\rho$ , on a  $\bar{\rho}' = \bar{\rho}$  : il est clair que  $\rho'$  est fidèle et que  $\rho'(\Gamma)$  est transverse au flot. Par suite (proposition 4.34), l'action de  $\rho'(\Gamma)$  sur  $E^u$  est propre et discontinue. Si  $\bar{\rho}(\Gamma) = \bar{\rho}'(\Gamma)$  est sans torsion, alors  $\rho'(\Gamma)$  est également sans torsion, son action sur  $E^u$  est donc libre (proposition 4.34).  $\square$

*Exemple 4.40.* L'assertion (4) s'applique à tous les sous-groupes propres et discontinus mis en évidence au §4.3. Notamment, comme sous-produit de la proposition 4.28, on obtient la classification des composantes des sous-groupes  $\Gamma \subset \text{Is}^K(E^u)$  transverses au flot, sans torsion et maximal pour ces propriétés. Pour chaque composante, la détermination de l'espace des déformations, c'est-à-dire ici  $H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ , est immédiate puisque la topologie de  $E^u/\Gamma$  est connue par 4.28. De plus, celle-ci est fixée dans chaque composante. On voit donc qu'il existe de nombreuses surfaces portant un champ de Killing et revêtues par  $E^u$ . Bien sûr, pour décrire les classes d'isométries, il faudrait encore prendre en compte l'action à droite du « groupe modulaire »  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

*Exemple 4.41.* Soit  $U$  un ouvert de discontinuité pour un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Is}(E^u)$  comme dans la proposition 4.35-(2). Si  $U/\Gamma$  est un tore, alors l'espace de déformations est  $H^1(\mathbf{Z}^2, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^2$  ; noter qu'il existe un unipotent de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}) = \text{Aut}(\mathbf{Z}^2)$  dont l'action stabilise cet espace. Contrairement à l'exemple 4.40, la topologie des quotients n'est pas fixe par déformations (on trouve aussi des anneaux). Dans le cas où  $U/\Gamma$  est une bouteille de Klein, on a  $\text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho) \simeq \mathbf{R}^2$  et  $H^1(\Gamma, \mathbf{R}_\rho) \simeq \mathbf{R}$  si  $\Gamma$  ne préserve pas le champ et  $\text{Der}(\Gamma, \mathbf{R}_\rho) = H^1(\Gamma, \mathbf{R}_\rho) \simeq \mathbf{R}$  sinon ; à nouveau, la topologie n'est pas fixe par déformation.

## 5 Surfaces compactes : classifications, points conjugués

### 5.1 Tores possédant un champ de Killing

Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien non plat muni d'un champ de Killing  $K$  non trivial. On a vu dans la preuve du théorème 3.25 que le flot de  $K$  est périodique, ce qui entraîne (existence d'une transversale fermée) que l'espace des feuilles du champ  $K$  est isométrique à  $(\mathbf{R}/m\mathbf{Z}, dx^2)$  pour un certain  $m > 0$ , appelé masse de  $K$ . Afin d'identifier l'espace des feuilles à  $\mathbf{R}/m\mathbf{Z}$ , on choisit un point  $\zeta$  et une orientation  $\nu$  de cet espace. Le triplet  $(T, \nu, \zeta)$  sera désigné simplement par « *tore marqué* » (il est sous-entendu que  $T$  possède un champ de Killing). La fonction  $\langle K, K \rangle$  se factorise par l'espace des feuilles et le marquage définit des applications  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  et  $\bar{f} : \mathbf{R}/m\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ . On a vu aussi qu'il existe une développante  $\mathcal{D} : \tilde{T} \rightarrow E_f^u$  (la proposition 4.38 donne la réciproque), que l'on peut construire grâce au marquage. *Par abus de langage nous appellerons ruban ou bande les parties de  $T$  dont un relevé au revêtement universel est un ruban ou une bande.*

Dans le cas riemannien, la mesure du paramètre de twist (ou décalage) repose sur l'existence de transversales globales lisses et naturelles : les géodésiques orthogonales au champ  $K$ .

Ici, il n'existe pas en général de telles transversales *lisses*. Notamment, si la fonction  $\langle K, K \rangle$  s'annule, aucune géodésique perpendiculaire à  $K$  ne coupe toutes les feuilles de  $K$  ; de plus, si  $T$  contient des bandes de type II, aucune feuille de lumière maximale n'est partout transverse à  $K$ . Pour pallier ce manque, nous commençons par construire un feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\natural$  naturel (du point de vue géométrique) dont les feuilles ne sont que lisses par morceaux dès que  $T$  contient des bandes de type II.

Si  $\langle K, K \rangle$  ne s'annule pas, on choisit pour feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\natural$  le feuilletage orthogonal à  $K$  ; noter que les deux feuilletages de lumière sont transverses au champ, mais aucun n'est privilégié. Si  $\langle K, K \rangle$  s'annule et si  $T$  ne contient que des bandes de type I, alors  $\tilde{T}$  est un ruban et on prend pour feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\natural$  l'unique feuilletage de lumière partout transverse à  $K$ .

Supposons maintenant que  $T$  n'est pas un ruban. Le champ  $K$  possédant une transversale fermée, on voit que  $T$  ne peut pas contenir de bande de type III. Il contient donc forcément des bandes de type II qui ne peuvent s'accumuler dans  $T$  car leurs bords appartiennent à des feuilletages de lumière différents. Elles sont donc en nombre fini, nécessairement pair. On note  $\zeta_i$ ,  $i$  modulo  $2k$ , les feuilles du champ  $K$  situées au milieu des bandes de type II (voir remarque 2.16) et  $C_i$  les cylindres fermés obtenus par découpage de  $T$  suivant les  $\zeta_i$ . Chaque  $C_i$  est un ruban à bord contenant au moins un zéro de  $\langle K, K \rangle$ , donc admet un unique feuilletage de lumière transverse à  $K$ . Ces feuilletages se recollent en un feuilletage de  $T$  noté  $\mathcal{K}^\natural$ , transverse à  $K$  et dont les feuilles sont des géodésiques de lumière brisées. Par construction, le lieu de bifurcation des feuilles de  $\mathcal{K}^\natural$  est la réunion des  $\zeta_i$ , chaque feuille étant formée de segments appartenant alternativement à l'un des deux feuilletages de lumière de  $T$ .

Si  $T$  n'est plat, le feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\natural$  est invariant par isométrie. C'est immédiat si  $T$  n'a pas de bandes de type II. Sinon, cela résulte de l'invariance par isométrie de la décomposition en cylindres par les milieux de ces bandes. Pour tout  $p \in T$ , on note  $\ell_p$  l'unique feuille de  $\mathcal{K}^\natural$  passant par le point  $p$ . On paramètre  $\ell_p$  de façon lisse par morceaux, directe (c.-à-d. compatible avec l'orientation  $\nu$  de l'espace des feuilles de  $K$ ) et de sorte que  $\ell_p(0) = p$ .

**DÉFINITION 5.1.** Soit  $K$  un champ de Killing de  $T$  de période  $t_0 > 0$ . On définit le twist de  $(T, \nu, \zeta)$  relativement à  $K$  comme étant l'élément  $\tau$  de  $\mathbf{R}/t_0\mathbf{Z}$  tel que  $\Phi_K^\tau(p') = p$ , où  $p$  est un point de  $\zeta$  et  $p'$  est le point de premier retour  $\ell_p$  sur  $\zeta$ . Ce nombre ne dépend pas du choix de  $\zeta$ , ni de celui de  $p \in \zeta$ .

Le paramètre de twist  $\tau$  est nul si et seulement si toute feuille de  $\mathcal{K}^\natural$  est fermée et coupe chaque feuille de  $K$  en un seul point. Plus généralement, le rapport  $\tau/t_0$  est rationnel si et seulement si toutes les feuilles de  $\mathcal{K}^\natural$  sont fermées.

On dira qu'un tore muni d'un champ de Killing est *élémentaire* s'il est plat ou si son champ de Killing ne possède pas de trajectoires de lumière. Les tores élémentaires sont en tout point semblables à des tores riemanniens, par exemple dans le cas non plat ils sont déterminés par la fonction  $\langle K, K \rangle$ , la période du flot et un paramètre de twist. Dans la suite du paragraphe §5.1 nous n'étudierons que les tores non élémentaires.

Sur tout tore marqué  $(T, \nu, \zeta)$  non élémentaire il existe un unique champ de Killing  $K_0$  de masse 1 vérifiant  $\langle K_0(p), \dot{\ell}_p(0) \rangle > 0$  avec  $p \in \zeta$  (si  $p$  correspond à un point singulier de  $\ell_p$ , alors  $\dot{\ell}_p(0)$  désigne la dérivée à droite). Ce champ sera appelé *champ de Killing privilégié* de  $(T, \nu, \zeta)$ . Il dépend de la position de  $\zeta$  par rapport aux feuilles  $\zeta_i$  (voir preuve du lemme 5.4).

Soit  $\bar{f}$  une fonction (lisse) de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$ . On appelle *marquage pair* de  $\bar{f}$  la donnée d'un sous-ensemble fini (éventuellement vide) de cardinal pair de l'ensemble des milieux des

intervalles de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \setminus \bar{f}^{-1}(0)$ . On note  $\mathcal{C}_0^P$  l'ensemble des fonctions lisses de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$  non constantes, s'annulant et munies d'un marquage pair. Deux triplets  $(T, \nu, \zeta)$ ,  $(T', \nu', \zeta')$  sont équivalents s'il existe une isométrie entre  $T$  et  $T'$  qui envoie  $(\nu, \zeta)$  sur  $(\nu', \zeta')$ . On note  $[T, \nu, \zeta]$  la classe d'équivalence (ou d'isométrie) du tore marqué  $(T, \nu, \zeta)$ .

**PROPOSITION 5.2.** *Il existe une bijection  $\Theta$  entre les classes d'isométrie de tores marqués  $[T, \nu, \zeta]$  non élémentaires et  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathcal{C}_0^P$ . Plus précisément,  $\Theta$  est définie par  $\Theta([T, \nu, p]) = (t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\}))$  où :*

- $t_0$  est la période (positive) du flot du champ de Killing privilégié  $K_0$ ,
- $\tau$  est le paramètre de twist de  $(T, \nu, p)$  relativement à  $K_0$ ,
- $\bar{f}$  est la fonction induite par  $\langle K_0, K_0 \rangle$  sur  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  via le marquage  $(\nu, \zeta)$  et  $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$  est l'ensemble des coordonnées dans  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  des milieux des bandes de type II.

*Preuve.* L'application  $\Theta$  est bien définie car  $(t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\}))$  ne dépend que de la classe d'isométrie du triplet  $(T, \nu, p)$  (une isométrie entre triplets envoie transversale sur transversale). On commence par montrer que  $\Theta$  est surjective. On se donne donc  $(t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\})) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathcal{C}_0^P$ . Soit  $f$  le relevé à  $\mathbf{R}$  de  $\bar{f}$  et soit  $E^u$  la surface associée. On oriente  $\mathcal{E}^u$ , l'espace des feuilles non triviales du champ de Killing, et on le pointe en  $\zeta^u$  de coordonnée transverse 0. On choisit  $q \in \zeta^u$  et un vecteur  $v$  de type lumière en  $q$  se projetant sur un vecteur unitaire de  $\mathcal{E}^u$  orienté positivement. Il existe alors un unique champ de Killing  $K^u$  induisant  $f$  sur  $\mathcal{E}^u$  et tel que  $\langle K^u, v \rangle = 1$ .

Soit  $c : [0, 1] \rightarrow E^u$  la géodésique de lumière brisée issue de  $q$  vérifiant  $\dot{c}(0) = v$ , se projetant sur une géodésique unitaire et directe de  $\mathcal{E}^u$  et bifurquant aux temps  $x_1, \dots, x_{2k}$ . On note  $c_0$  le segment  $c([0, x_1])$ ,  $c_i$  le segment  $c([x_i, x_{i+1}])$  et  $c_{2k}$  le segment  $c([x_{2k}, 1])$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k}$  les réflexions génériques vérifiant  $\sigma_i(c(x_i)) = c(x_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 2k\}$ . On voit que  $\hat{c} = c_0 \cdot \sigma_1(c_1) \cdot (\sigma_2 \circ \sigma_1)(c_2) \cdot \dots \cdot (\sigma_{2k} \circ \dots \circ \sigma_1)(c_{2k})$  est contenu dans un ruban  $R$ . Le chemin  $\hat{c}$  étant de longueur 1, il existe donc une isométrie directe  $\varrho_R$  qui vérifie  $\varrho_R(q) = \hat{c}(1)$ . Par conséquent, il existe  $\Phi \in \text{Is}^{+,K}(E^u)$  tel que  $\Phi(q) = c(1)$ . Cet élément est unique d'après la proposition 2.6.

Soit  $\gamma$  le chemin obtenu en mettant bout à bout les translatés de  $c$  sous l'action du groupe engendré par  $\Phi$ . Ce chemin est un relevé d'une géodésique maximale de  $\mathcal{E}^u$ . On note  $U$  le saturé de  $\gamma$  sous l'action du flot de  $K^u$ . L'ouvert  $U$  est invariant sous l'action du groupe engendré par le flot de  $K^u$  et  $\Phi$ . On désigne par  $\Lambda_\tau$  le groupe engendré par  $\Phi_{K^u}^{t_0}$  et  $\Phi_{K^u}^\tau \circ \Phi$ . Le quotient de  $(U, \nu^u, \zeta^u)$  par  $\Lambda_\tau$  est bien un tore. Le chemin  $\gamma$  se projette sur une transversale  $\ell_p$ , grâce à quoi on vérifie que  $\Theta([(U, \nu^u, \zeta^u)/\Lambda_\tau]) = (t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\}))$ .

Il nous reste à voir que si  $(t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\})) = \Theta([T, \nu, \zeta])$ , alors le tore construit ci-dessus est isométrique  $(T, \nu, \zeta)$ . Soit  $\mathcal{D} : \tilde{T} \rightarrow E_f^u$  une développante envoyant un relevé d'un point  $p \in \zeta$  sur  $q$ ,  $K_0$  sur  $K^u$  et préservant les orientations respectives des espaces des feuilles. L'image par  $\mathcal{D}$  de  $\tilde{\ell}_p$ , le relevé au revêtement universel de  $\ell_p$ , est forcément  $\gamma$  et donc l'image de  $\mathcal{D}$  est  $U$ . Le groupe d'holonomie de  $T$  est contenu dans  $\text{Is}^0(E^u) \times G$ , il est engendré par  $\Phi_K^{t_0}$  et un élément qui laisse  $U$  invariant et envoie  $q$  sur  $\Phi_{K^u}^\tau \circ \gamma(1)$ . Cet élément ne peut être que  $\Phi_{K^u}^\tau \circ \Phi$ . Ce qui montre que le tore  $(T, \nu, \zeta)$  est isométrique à  $(U, \nu^u, \zeta^u)/\Lambda_\tau$  et termine la preuve.  $\square$

**Remarque 5.3.** On peut choisir n'importe quel réel positif  $m$  comme masse du champ privilégié. La proposition 5.2 s'adapte alors sans difficultés.

Pour obtenir la classification des tores non élémentaires il suffit de voir ce que deviennent les paramètres associés à  $T$  lorsque  $\nu$  est changé en  $-\nu$  et lorsque  $\zeta$  varie.

**LEMME 5.4.** *Soit  $(T, \zeta, \nu)$  un tore marqué non élémentaire. Si on pose  $\Theta([T, \zeta, \nu]) = (t_0, \tau/t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2k}\}))$ , alors  $t_0$  ne dépend pas du choix de  $(\zeta, \nu)$  et*



- (1) lorsque  $\nu$  est remplacé par  $-\nu$ ,  $\tau$  devient  $-\tau$ ,  $\bar{f}$  devient  $\bar{f}^\vee$  et  $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$  devient  $\{1 - x_{2k}, \dots, 1 - x_1\}$ ,
- (2) lorsque  $\zeta$  est remplacé par  $\zeta'$  de coordonnée  $y$  pour le marquage  $(\zeta, \nu)$ , la fonction  $\bar{f}$  devient  $\bar{f}(\cdot + y)$ ,  $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$  devient  $\{x_1 - y, \dots, x_{2k} - y\}$  et  $\tau$  devient  $(-1)^i \tau$  où  $i \in \{1, \dots, 2k\}$  vérifie  $y \in [x_i, x_{i+1}[$  ( $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  étant cycliquement orienté).

*Preuve.* Le seul point non évident est le comportement du twist lorsque  $\zeta$  est déplacé. Il s'explique simplement par le fait que lorsque  $\zeta$  franchit un point de bifurcation de  $\ell$  alors  $K_0$  est transformé en  $-K_0$ , ce qui inverse le twist.  $\square$

**COROLLAIRE 5.5.** *Les classes d'isométrie de tores lisses possédant un champ de Killing et non élémentaires sont en bijection avec le quotient de  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathcal{C}_0^P$  par la relation d'équivalence définie au lemme 5.4.*

*Remarque 5.6.* On voit que contrairement au cas riemannien, le sens du twist importe. Soit  $\Gamma_\epsilon$  ( $\epsilon = \pm 1$ ) le sous-groupe des isométries de  $R = (\mathbf{R}^2, 2dx dy + \cos(x) dy^2)$  engendré par  $\gamma_0(x, y) = (x, y + 1)$  et  $\gamma_\epsilon(x, y) = (x + 2\pi, y + \epsilon/4)$ . Le lecteur pourra vérifier que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_{-1}$  sont distingués dans  $\text{Is}(R)$  (voir proposition 2.6); les tores associés ne sont pas isométriques.

## 5.2 Bouteilles de Klein possédant un feuilletage de Killing

On s'intéresse maintenant aux bouteilles de Klein lorentziennes  $B$  non plates dont le revêtement universel possède un champ de Killing invariant  $\tilde{K}$ . Celui-ci est préservé ou retourné par isométrie. Par conséquent,  $\tilde{K}$  ne passe pas forcément au quotient, mais il induit toujours un « feuilletage de Killing »  $\mathcal{K}$ . On est donc en présence de deux types de bouteilles : celles n'admettant pas de champ de Killing mais seulement un feuilletage  $\mathcal{K}$  (type 1) et celles admettant un champ de Killing (type 2,  $\mathcal{K}$  orientable). De plus, dans les deux cas, la fonction  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$  passe au quotient et induit une fonction constante le long des feuilles de  $\mathcal{K}$ .

Le revêtement d'orientation d'une bouteille  $B$  de type 1 ou 2 est un tore lorentzien  $T$  admettant un champ de Killing (voir preuve de la proposition 4.38) et une isométrie indirecte involutive  $\delta$  telle que  $T/\langle \delta \rangle = B$ . Ainsi toutes les feuilles de  $\mathcal{K}$  sont fermées. On reprend les conventions et les notations du §5.1 concernant les tores marqués. On dira que  $B$  est non élémentaire si  $T$  l'est.

**PROPOSITION 5.7.** *Soit  $(T, \nu, \zeta)$  un tore marqué non plat, muni d'un champ de Killing  $K$  (non trivial) de masse  $2\mathbf{m}$  et possédant une isométrie involutive indirecte  $\delta$  sans points fixes. Alors le paramètre de twist de  $(T, \nu, \zeta)$  est nul. De plus*

- (1) si  $\delta_* K = -K$  (type 1), alors  $\delta$  induit une rotation de longueur  $\mathbf{m}$  de l'espace des feuilles de  $K$  et, si  $T$  n'est pas élémentaire, le nombre de bandes de type II de  $T$  est congru à 2 modulo 4,
- (2) si  $\delta_* K = K$  (type 2), alors  $\delta$  induit une réflexion sur l'espace des feuilles de  $K$ , dont les deux points fixes  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont au milieu d'une bande de type II dès que  $T$  est non élémentaire.

Autrement dit, pour le type 1, la fonction  $\bar{f}$  définie par le marquage est  $\mathbf{m}$ -périodique; si  $\bar{f}$  s'annule, il existe  $h \in N$  tel que les milieux des bandes de type II ont pour coordonnées  $x_1, \dots, x_{2h+1}, \mathbf{m} + x_1, \dots, \mathbf{m} + x_{2h+1}$ . Pour le type 2, en choisissant  $\zeta = \zeta_0$ , on a  $\bar{f} = \bar{f}^\vee$ ,  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  ont pour coordonnées 0 et  $\mathbf{m}$ , et si  $\bar{f}$  s'annule, les milieux des bandes de type II ont pour coordonnées  $0, x_2, \dots, x_{k-1}, \mathbf{m}, 2\mathbf{m} - x_{k-1}, \dots, 2\mathbf{m} - x_2$  ( $f$  est de type (3b) ou (3c) dans la terminologie du §4.3).

*Preuve.* Observons d'abord que  $\delta$  doit permuter les feuilletages de lumière de  $T$  tout en laissant invariant le feuilletage transverse  $\mathcal{K}^h$ . Par suite, ou bien  $T$  est élémentaire, ou bien  $T$  admet des bandes de type II. Dans ce dernier cas, on note  $K_0$  le champ privilégié de  $(T, \nu, \zeta)$  et  $K_1$  celui de  $(T, \delta^*\nu, \delta(\zeta))$ ; comme  $\delta^*\nu = \nu$  si et seulement si  $\delta_*K = -K$ , on a donc toujours  $K_0 = -K_1$ .

Si  $\delta_*K = -K$ , alors  $\delta^*\nu = \nu$  et  $\delta$  induit une isométrie directe sur l'espace des feuilles, c'est-à-dire une rotation. Comme  $\delta^2 = \text{Id}$ , il s'agit d'une rotation de longueur  $d = 0$  ou  $\mathfrak{m}$ . Si  $d = 0$ , alors  $\delta$  induit sur chaque feuille de  $K$  une isométrie indirecte et donc fixe des points. D'autre part, il existe  $p \in \zeta$  tel que  $\delta(p) \in \ell_p$  (car  $p$  et  $\delta(p)$  varient en sens inverse par rapport à  $K$ ). On en déduit que  $\ell_p$  est invariante par  $\delta$ , fermée et qu'elle ne coupe qu'une fois  $\zeta$  : le twist est nul. La fonction  $\bar{f}$  définie par le marquage est  $\mathfrak{m}$ -périodique. Si  $\bar{f}$  s'annule, les coordonnées des milieux des bandes de type II s'écrivent  $x_1, \dots, x_k, \mathfrak{m} + x_1, \dots, \mathfrak{m} + x_k$ . L'invariance de  $\mathcal{K}^h$  par  $\delta$  (ou  $K_1 = (-1)^k K_0$ ) impose  $k$  impair.

Si  $\delta_*K = K$ , alors  $\delta$  ne préserve pas  $\nu$  et induit une isométrie indirecte sur l'espace des feuilles, c'est-à-dire une réflexion laissant fixe deux feuilles  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  à distance  $\mathfrak{m}$ . Dans le cas non élémentaire, ces feuilles sont nécessairement au milieu de bandes de types II car  $\delta(\mathcal{K}^h) = \mathcal{K}^h$  (inversion des feuilletages de lumière par  $\delta$ ). Le long de  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$ ,  $\delta$  induit une rotation de longueur  $t_0/2$  et donc  $\sigma = \phi_K^{t_0/2} \circ \delta$  est une réflexion de  $T$  fixant point par point  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$ . Chaque feuille de  $\mathcal{K}^h$  est donc fermée, constituée d'un arc de  $\zeta_0$  à  $\zeta_1$  et de son image par  $\sigma$ , ce qui force le twist à être nul.  $\square$

Il est maintenant très facile de décrire les bouteilles de Klein élémentaires. On peut supposer que la masse de l'espace des feuilles est égale à 1. Leur revêtement universel est donc isométrique à  $(\mathbf{R}^2, \pm dx^2 + f(x)dy^2)$  où  $f$  est 2-périodique et ne s'annule pas. On note  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les générateurs usuels du groupe fondamental. Si la bouteille est de type 1 alors  $f$  est 1-périodique et il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\gamma_1(x, y) = (x + 1, -y)$  et  $\gamma_2(x, y) = (x, y + t_0)$ . Si la bouteille est de type 2 alors on peut supposer que  $f$  est paire et il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\gamma_1(x, y) = (-x, y + t_0/2)$  et  $\gamma_2(x, y) = (x + 2, y)$ .

Soit  $B$  une bouteille de type 1 non élémentaire et soit  $\mathcal{K}$  son « feuilletage de Killing ». On déduit de la proposition 5.7 que l'espace des feuilles de  $\mathcal{K}$  muni de la métrique riemannienne habituelle est isométrique  $\mathbf{R}/\mathfrak{m}\mathbf{Z}$ . Pour réaliser cette identification, on munit cet espace d'une orientation et d'une origine, notées encore  $\nu$  et  $\zeta$ , et on étudie les *bouteilles marquées*  $(B, \nu, \zeta)$ . On dira que le tore marqué  $(T, \nu', \zeta')$  est un revêtement d'orientation marqué de  $(B, \nu, \zeta)$  si  $T$  est un revêtement à 2 feuillets de  $B$  et que ce revêtement envoie  $(\nu', \zeta')$  sur  $(\nu, \zeta)$ .

Soit  $\bar{f}$  une fonction lisse de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$  qui s'annule. On appelle *marquage impair* de  $\bar{f}$  la donnée d'un sous-ensemble fini de cardinal impair de l'ensemble des milieux des intervalles de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \setminus \bar{f}^{-1}(0)$ . On note  $\mathcal{C}_0^I$  l'ensemble des fonctions lisses non constantes de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$ , s'annulant et munies d'un marquage impair.

**PROPOSITION 5.8.** *Il existe une bijection  $\Xi_1$  entre les classes d'isométrie de bouteilles de Klein de type 1, non élémentaires et marquées  $(B, \nu, \zeta)$  et  $\mathbf{R}_+^* \times \mathcal{C}_0^I$ . Plus précisément  $\Xi_1([B, \nu, \zeta]) = (t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2h+1}\}))$  où*

- *le réel  $t_0$  est la période du champ privilégié d'un revêtement d'orientation marqué de  $B$ ,*
- *la fonction  $\bar{f}$  est induite par  $\langle \pm K_0, \pm K_0 \rangle$  sur  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  via le marquage et  $\{x_1, \dots, x_{2h+1}\}$  est l'ensemble des coordonnées des milieux des bandes de type II.*

*Preuve.* D'après la proposition 5.7, si  $\Xi_1[B, \nu, \zeta] = (t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2h+1}\}))$ , alors tout revêtement d'orientation marqué de  $(B, \nu, \zeta)$  appartient à  $\Theta^{-1}(t_0, 0, (\hat{f}, A))$  où  $\hat{f}$  est la

fonction sur  $\mathbf{R}/2\mathbf{Z}$  induite par  $f$  et  $A = \{x_1, \dots, x_{2h+1}, 1+x_1, \dots, 1+x_{2h+1}\}$  (on prend  $\Theta$  définie à partir des champs privilégiés de masse 2, voir remarque 5.3). Pour montrer la proposition, il suffit d'établir qu'un tel tore est le revêtement d'une bouteille de Klein de type 1, unique à isométrie près. On se place à nouveau dans  $E_f^u$  transversalement orienté et pointé en  $\zeta^u$  de coordonnées 0 dans les rubans qui le contiennent et on choisit un champ de Killing  $K^u$ .

Soit  $c : [0, 2] \rightarrow E^u$  une géodésique de lumière brisée issue de  $q \in \zeta^u$ , se projetant sur une géodésique unitaire directe de  $\mathcal{E}^u$  et bifurquant aux temps  $x_1, \dots, x_{2h+1}, 1+x_1, \dots, 1+x_{2h+1}$ . La fonction  $f$  étant 1-périodique, on voit, par un raisonnement proche de celui utilisé pour montrer la proposition 5.2, qu'il existe une unique isométrie  $\Psi$  ne préservant ni  $K^u$ , ni l'orientation qui envoie  $c([0, 1])$  sur  $c([1, 2])$ . Soit  $\gamma$  le chemin obtenu en mettant bout à bout les translatés de  $c$  sous l'action du groupe engendré par  $\Psi^2$  et soit  $U$  le saturé de  $\gamma$  sous l'action du flot de  $K^u$ . Le quotient de  $(U, \nu^u, \zeta^u)$  par le groupe engendré par  $\Phi_{K^u}^{t_0}$  et  $\Psi^2$  est un tore appartenant à  $\Theta^{-1}(t_0, 0, (\hat{f}, A))$ . L'application  $\Psi$  induit sur  $T$  une involution isométrique indirecte  $\delta$  sans points fixes et ne préservant pas le champ.

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux isométries involutives indirectes sans points fixes de  $(T, \nu', \zeta')$  envoyant  $K$  sur  $-K$ . Il est clair que  $\delta = \delta'$  si et seulement si elles coïncident en un point. Par conséquent il existe  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $\delta' = \Phi_K^t \circ \delta$  et donc  $\delta$  et  $\delta'$  sont conjuguées par  $\Phi_K^{t/2}$ . Ainsi  $(T, \nu', \zeta')/\langle \delta \rangle$  et  $(T, \nu', \zeta')/\langle \delta' \rangle$  sont isométriques.  $\square$

La classification est déduite de la proposition 5.8 par le même raisonnement que pour les tores.

LEMME 5.9. *Soient  $(t_0, (\bar{f}, \{x_1, \dots, x_{2h+1}\}))$  les données associées à la bouteille de type 1 transversalement orientée et pointée  $(B, \nu, \zeta)$ .*

- (1) *Lorsque  $\nu$  est remplacé par  $-\nu$  alors  $\bar{f}$  est remplacé par  $\bar{f}^\vee$  et  $\{x_1, \dots, x_{2h+1}\}$  devient  $\{1-x_{2h+1}, \dots, 1-x_1\}$ .*
- (2) *Lorsque  $\zeta$  est remplacé par  $\zeta'$  de coordonnée  $y$ ,  $\bar{f}$  est remplacé par  $x \mapsto \bar{f}(x+y)$  et  $\{x_1, \dots, x_{2h+1}\}$  devient  $\{x_1-y, \dots, x_{2h+1}-y\}$ .*

COROLLAIRE 5.10. *Les classes d'isométrie de bouteilles de type 1 non élémentaires sont en bijection avec le quotient de  $\mathbf{R}_+^* \times \mathcal{C}_0^I$  par l'action de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  définie à la proposition 5.9.*

On regarde maintenant les bouteilles de type 2 non élémentaires. D'après la proposition 5.7, l'espace des feuilles de  $\mathcal{K}$  d'une telle bouteille est isométrique à un intervalle  $[0, m]$ . Pour réaliser cette identification, il suffit de choisir une des deux feuilles courtes de  $K$  que l'on note  $\zeta_0$ . On travaille donc avec les paires  $(B, \zeta_0)$ . Il existe à nouveau un champ de Killing privilégié  $K_0$  tel que  $m = 1$  et dont les orbites au bord de la bande associée à  $\zeta_0$  sont dirigées vers un sommet de type selle. On dira que  $(T, \nu, \zeta)$  est un revêtement d'orientation marqué de  $(B, \zeta_0)$  si c'est un revêtement à deux feuillets envoyant  $\zeta$  sur  $\zeta_0$ .

Soit  $\bar{f}$  une fonction (lisse) *paire* de  $\mathbf{R}/2\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$  s'annulant. On appelle *marquage symétrique* de  $\bar{f}$  la donnée d'un sous-ensemble fini de l'ensemble des milieux des intervalles de  $\mathbf{R}/2\mathbf{Z} \setminus \bar{f}^{-1}(0)$  qui est invariant par la symétrie  $x \mapsto -x$  et qui contient 0 et 1. On note  $\mathcal{C}_0^S$  l'ensemble des fonctions lisses de  $\mathbf{R}/2\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{R}$  qui sont paires, s'annulent, vérifient  $\bar{f}(0)\bar{f}(1) \neq 0$  et sont munies d'un marquage symétrique.

PROPOSITION 5.11. *Il existe une bijection  $\Xi_2$  entre les classes d'isométrie de bouteilles de Klein de type 2 marquées, non élémentaires et  $\mathbf{R}_+^* \times \mathcal{C}_0^S$ .*

*Plus précisément  $\Xi_2(B, \zeta_0) = (t_0, (\bar{f}, \{0, x_2, \dots, x_{j-1}, 1\}))$  où*

- $t_0 > 0$  est la période du flot de  $K_0$ ,
- $\bar{f}$  est la fonction (paire) induite par  $\langle K_0, K_0 \rangle$  sur le revêtement d'orientation de  $B$  et  $\{0, x_2, \dots, x_{j-1}, 1\}$  sont les coordonnées des milieux des bandes de type II de  $B$ .

*Preuve.* D'après la proposition 5.7, si  $\Xi_2[B, \zeta_0] = (t_0, (\bar{f}, \{0, x_2, \dots, x_{j-1}, 1\}))$ , alors tout revêtement d'orientation marqué de  $(B, \zeta_0)$  appartient à  $\Theta^{-1}(t_0, 0, (\bar{f}, A))$  avec  $A = \{0, x_2, \dots, 1, \dots, 2 - x_2\}$ . Pour montrer la proposition, il suffit de montrer qu'un tel tore est le revêtement d'orientation marqué d'une unique bouteille de Klein de type 2 marquée. On se place dans l'espace  $E^u$  transversalement pointé en  $\zeta^u$  de coordonnées 0 dans les rubans qui le contiennent (on rappelle que  $\zeta$  est au milieu d'une bande).

On choisit  $q \in \zeta^u$  et un champ de Killing  $K^u$ . On marque les deux côtés du carré contenant  $\zeta^u$  qui contiennent le sommet de type source. Soit  $\Psi$  la réflexion non générique fixant  $\zeta^u$ . On remarque que  $\Psi$  permute les 2 côtés marqués précédemment. Il existe une unique géodésique de lumière brisée  $c : [-1, 1] \rightarrow E^u$  se projetant sur une courbe unitaire directe de  $\mathcal{E}^u$ , vérifiant  $c(0) = q$ , intersectant les côtés marqués et bifurquant aux temps  $-x_{j-1}, \dots, 0, \dots, x_{j-1}$ . Elle est invariante par  $\Psi$ . Soit  $\Phi$  l'unique élément de  $\text{Is}^{+,K}(E^u)$  envoyant  $c(-1)$  sur  $c(1)$ .

On note  $\gamma$  le chemin obtenu en mettant bout à bout les translatés de  $c$  sous l'action de  $\Phi$ , il bifurque forcément en  $c(\pm 1)$ . Soit  $U$  le saturé de  $\gamma$  par  $\Phi_{K^u}$ . Le quotient de  $U$  par le groupe engendré par  $\Phi_{K^u}^{t_0}$  et  $\Phi$  est un tore appartenant à  $\Theta^{-1}(t_0, 0, (\bar{f}, A))$ . L'application  $\Phi_{K^u}^{t_0/2} \circ \Psi$  induit sur ce tore une isométrie involutive (son carré vaut car  $\Phi_{K^u}^{t_0}$ ), indirecte, sans points fixes et préservant  $K$ .

Soit  $(T, \nu', \zeta')$  un revêtement d'orientation marqué d'une bouteille  $(B, \zeta_0)$  de type 2 et soit  $\delta$  telle que  $B = T/\langle \delta \rangle$ . L'application  $\delta$  est l'unique isométrie vérifiant  $\delta(\zeta') = \zeta'$ ,  $\delta_* K = K$  et induisant une symétrie sur l'espace des feuilles de  $K$ . Par conséquent,  $(B, \zeta_0)$  est uniquement déterminée.  $\square$

La classification est déduite de la proposition 5.11 comme précédemment.

**LEMME 5.12.** *Soient  $(t_0, (\bar{f}, \{0, \dots, 1\}))$  les données associées à la bouteille de type 2 marquée  $(B, \zeta_0)$ . Lorsque  $\zeta_0$  est remplacé par la feuille  $\zeta_1$  de coordonnée 1,  $\bar{f}$  est remplacée par  $x \mapsto \bar{f}(1 - x)$  et  $\{0, x_2, \dots, x_{j-1}, 1\}$  devient  $\{0, 1 - x_{j-1}, \dots, 1 - x_2, 1\}$ .*

**COROLLAIRE 5.13.** *Les classes d'isométrie de bouteilles de type 2 non élémentaires sont en bijection avec le quotient de  $\mathbf{R}_+^* \times \mathcal{C}_0^S$  par l'action de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  définie à la proposition 5.12.*

### 5.3 Composantes de l'espace des métriques

On s'intéresse ici aux composantes connexes de l'espace des tores et des bouteilles de Klein contenant des surfaces modélées sur un espace  $E_f^u$ , avec  $f$  donnée. De façon générale, on sait que les composantes de l'espace des métriques lorentziennes sur une variété correspondent bijectivement, *via* le choix d'un champ de droites de type temps par métrique, aux classes d'homotopie de sections du fibré projectif tangent, [17, § 40].

Pour les surfaces compactes (tores et bouteilles de Klein), les composantes de l'espace des métriques sont caractérisées par le comportement des cônes (positifs ou négatifs) le long de certaines courbes. Il s'agira ici de feuilles de  $\mathcal{K}$  (feuilletage associé au champ de Killing) ou de feuilles du feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\#$ . Au-dessus d'une courbe d'un type donné (temps, espace ou lumière, par exemple une feuille de  $\mathcal{K}$ ), le comportement des cônes est trivial puisqu'ils ne peuvent pas changer de côté par rapport à la courbe. Il n'en est pas de même

au-dessus d'une géodésique de lumière brisée  $\ell$ , par exemple une feuille de  $\mathcal{K}^n$  en présence de bandes de type II. On convient qu'une telle géodésique  $\ell$  est toujours localement injective, ce qui signifie qu'en chaque point de bifurcation  $p \in \ell$ , le feuilletage de lumière local qui porte  $\ell$  change (pour éviter les aller-retours). Cela permet d'attribuer un signe à  $p$  : on dira que le point de bifurcation  $p \in \ell$  est positif (resp. négatif) si  $\ell$  traverse une direction positive (resp. négative) en  $p$  ; les directions de signe opposé ne sont pas traversées par  $\ell$ .

DÉFINITION 5.14. Soit  $\sigma = ((-1)^{s_1}, \dots, (-1)^{s_N})$  une suite finie de signes ( $s_j = 0$  ou 1). On appelle *suite réduite associée* à  $\sigma$  la suite de signes alternés obtenue en effaçant le premier couple de signes successifs égaux, puis en itérant cette opération.

LEMME 5.15 (enroulement des cônes au-dessus d'une courbe de lumière brisée). Soit  $X$  une surface lorentzienne et soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  une géodésique de lumière brisée, localement injective. On suppose que  $\gamma([0, 1])$  admet  $N \geq 1$  points de bifurcation, appartenant à  $\gamma(]0, 1[)$ . Soient enfin deux sections continues  $\xi^+$  et  $\xi^-$  du fibré trivial (orienté)  $\gamma^*(TX)$ , respectivement positive et négative pour la métrique. Alors, au signe près, le nombre d'enroulement (compté en tours) du repère  $(\xi^+, \xi^-)$  le long de  $\gamma$  vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+s_j} = \pm \frac{M}{4}, \quad (28)$$

où  $(-1)^{s_1}, \dots, (-1)^{s_N}$  est la suite des signes des points de bifurcation, dans l'ordre du paramétrage, et  $M$  désigne la longueur de la suite réduite associée.

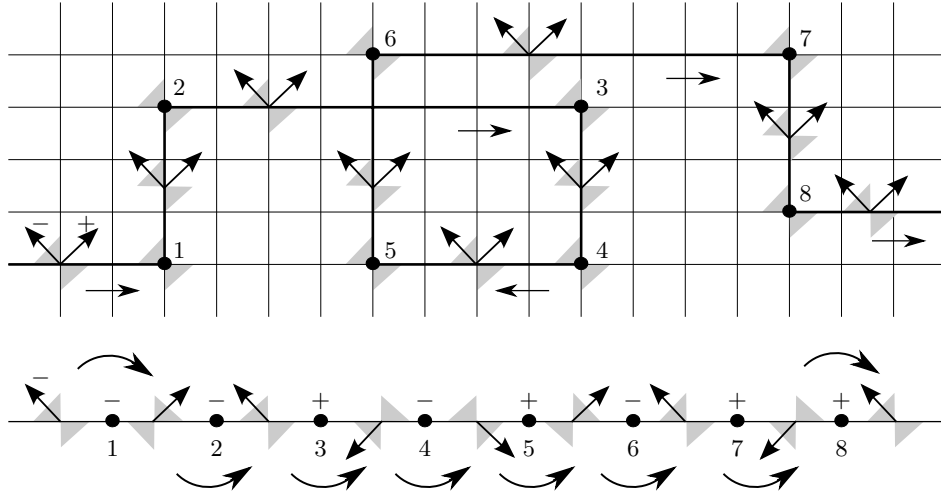


FIGURE 9 – Enroulement des cônes

*Preuve.* Notons  $p_1, \dots, p_N$  la suite ordonnée des points de bifurcations le long de  $\gamma$ . À chaque passage d'un point  $p_j$ , le cône du signe opposé à  $p_j$  change de côté par rapport à la feuille (plus précisément la section du signe opposé à  $p_j$  change de côté et l'autre non), le repère  $(\xi^+, \xi^-)$  fait donc un quart de tour. De plus, entre  $p_j$  et  $p_{j+1}$ , le sens de ce quart de tour change si  $p_j$  et  $p_{j+1}$  sont de même signe, et ne change pas sinon. Ce comportement est illustré à la figure 9 (cône négatif en gris). Par une récurrence immédiate, on voit que le sens  $\epsilon_j$  du quart de tour au passage de  $p_j$ , en orientant  $\gamma^*(TX)$  pour que  $\epsilon_1 = 1$ , vaut  $\epsilon_j = (-1)^{s_1+s_j+j-1}$ . Par suite, le nombre d'enroulement cherché est donné

par  $\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \epsilon_j = \frac{1}{4} (-1)^{s_1+1} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+s_j}$ . Enfin, l'expression de l'enroulement en fonction de  $M$  découle directement du comportement des cônes décrit ci-dessus.  $\square$

Sur le tore, tout champ de droite de type temps est homotope à chacun des champs de lumière. L'appartenance à une composante connexe est donc déterminée par la classe d'homotopie des feuilletages de lumière, c'est-à-dire par le nombre et le sens de leurs composantes de Reeb ainsi que par la classe d'homotopie de leurs feuilles compactes (voir par exemple [1] pour plus de détails). Soit  $\mathcal{L}$  un feuilletage de lumière d'un tore  $(T, K)$ . Toute orientation de la classe d'isotopie des feuilles compactes de  $\mathcal{L}$  induit une orientation de  $\mathcal{L}$  au voisinage de ces feuilles, ce qui permet de distinguer les composantes de Reeb positives ou négatives suivant que leurs feuilles, parcourues dans le sens direct donné par l'orientation locale, s'accumulent au bord ou non. Ces composantes sont stables par le flot de  $K$ , donc bordées par des orbites de celui-ci ; s'il en existe, on convient d'orienter la classe des feuilles compactes de  $\mathcal{L}$  dans le sens du champ  $K$ . Si  $r^+(\mathcal{L})$  (resp.  $r^-(\mathcal{L})$ ) désigne le nombre de composantes de Reeb positives (resp. négatives) de  $\mathcal{L}$ , l'entier naturel  $r(T) = |r^+(\mathcal{L}) - r^-(\mathcal{L})|$  caractérise la composante de la métrique modulo l'action des difféomorphismes.

À chaque composante de Reeb d'un feuilletage de lumière de  $(T, K)$  correspond un ruban maximal  $R$  de  $(T, K)$ , nécessairement bordé par des bandes de type II, mais la réciproque n'est pas vraie. Cela dépend de la position relative de  $K$  et des bandes bordant  $R$ . Les termes *ruban* et *bande* de  $(T, K)$  sont ici utilisés avec la même convention qu'au § 5.1. On rappelle qu'une bande de type II est une composante de Reeb du feuilletage orthogonal à  $K$ , voir lemme 2.8.

**DÉFINITION 5.16.** On dira qu'une bande de type II munie d'un champ  $K$  est *positive* si c'est une composante de Reeb positive du feuilletage orthogonal à  $K$  (au sens précédent, le bord étant orienté par  $K$ ), et qu'elle est *négative* sinon.

Les orbites du champ qui bordent une bande de type II positive (resp. négative) sont dirigées vers un sommet de type « selle » (resp. de type puits). Sur la figure 10, les bandes  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_4$  sont positives tandis que  $S_3$  est négative (représentation du revêtement universel, feuilletage orthogonal à  $K$  en pointillés).

**LEMME 5.17.** *Soit  $R$  un ruban maximal de  $(T, K)$  bordé par deux bandes  $S_1$  et  $S_2$  de type II, et soit  $\bar{R}$  l'adhérence de  $R$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\bar{R}$  est une composante de Reeb de l'un des feuilletages de lumière de  $T$ ,
- (2)  $S_1$  et  $S_2$  ont le même signe (qui est alors celui de  $\bar{R}$ , avec les conventions ci-dessus),
- (3) la fonction  $\langle K, K \rangle$  est de signe différent sur  $S_1$  et  $S_2$ .

*Preuve.* Les géodésiques de lumière d'une bande de type II d'un tore s'accumulent du côté de la selle, ou si l'on préfère une feuille de lumière bordant une bande de type II a une holonomie (en tant que feuille d'un des feuilletages de lumière) « contractante » lorsqu'elle est parcourue en se dirigeant vers la selle. Par conséquent  $\bar{R}$  est une composante de Reeb de l'un des feuilletages de lumière de  $T$  si et seulement si  $S_1$  et  $S_2$  sont de même signe. Le signe de cette composante  $\bar{R}$  (le bord étant orienté par  $K$ ) est alors celui des  $S_i$ .

Comme les champs de lumière sont homotopes aux champs de droites négatif (ou positifs), la condition (1) est vérifiée si et seulement si les cônes font un demi-tour en traversant  $\bar{R}$  le long d'une feuille de  $\mathcal{K}^{\text{th}}$ . D'après le lemme 5.15, cela revient à dire que les signes des 2 bifurcations, c'est-à-dire les signes de  $\langle K, K \rangle$  sur  $S_1$  et  $S_2$ , sont opposés.  $\square$

**PROPOSITION 5.18.** *Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien muni d'un champ de Killing. On note  $k^+$  (resp.  $k^-$ ) le nombre de bandes de type II positives (resp. négatives) au sens de la*



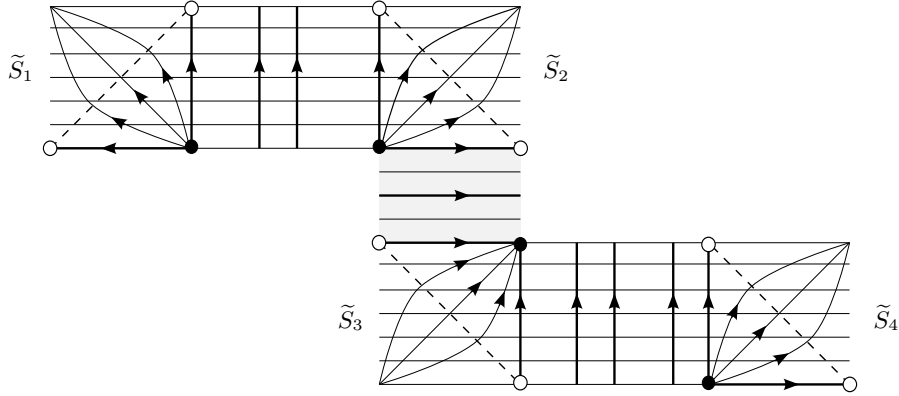


FIGURE 10 – Composante de Reeb et de suspension de  $\mathcal{L}$

définition 5.16. Par ailleurs, soit  $((-1)^{s_1}, \dots, (-1)^{s_{2k}})$  la suite cycliquement ordonnée des signes de  $\langle K, K \rangle$  sur les milieux des bandes de type II et soit  $L$  la longueur de la suite réduite associée. L'entier  $r(T) \in \mathbf{N}$  caractérisant la composante de la métrique modulo l'action des difféomorphismes est alors donné par

$$r(T) = \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+s_j} \right| = \frac{1}{2} |k^+ - k^-|.$$

*Preuve.* L'entier  $r(T)$  est égal au nombre de demi-tours effectués par les cônes de la métrique le long d'une feuille de  $\mathcal{K}^h$  qui fait un tour dans l'espace des feuilles de  $\mathcal{K}$ . Si  $(T, K)$  n'admet pas de bandes de type II, les feuilles de  $\mathcal{K}^h$  sont d'un type donné et  $r(T) = 0$ . Sinon, le nombre de demi-tours est donné par le lemme 5.15.

Notons  $S_1, \dots, S_{2k}$  les bandes de type II de  $T$ , dans l'ordre cyclique, en supposant que  $k \geq 1$ . Les couples successifs  $(S_1, S_2), \dots, (S_{2k-1}, S_{2k})$  bordent  $k$  rubans maximaux  $R_1, \dots, R_k$ , feuilletés par l'un des feuilletages de lumière  $\mathcal{L}$ . Le complémentaire de ces rubans est constitué de composantes de suspension de  $\mathcal{L}$  (en gris sur la figure 10), éventuellement réduites à une feuille fermée. D'après le lemme 5.17, le nombre  $r^+(\mathcal{L})$  de composantes de Reeb positives de  $\mathcal{L}$  est égal au nombre de couples  $(S_{2i-1}, S_{2i})$  de signe  $(+, +)$ , et de même pour  $r^-(\mathcal{L})$ . Par suite, on a  $|k^+ - k^-| = 2|r^+(\mathcal{L}) - r^-(\mathcal{L})|$ .  $\square$

*Remarque 5.19.* Soit  $\mathcal{K}^\perp$  le feuilletage orthogonal à  $K$ . Par définition du signe des bandes de type II, on a évidemment  $k^+ = r^+(\mathcal{K}^\perp)$  et  $k^- = r^-(\mathcal{K}^\perp)$ .

PROPOSITION 5.20. Soit  $f$  une fonction périodique. Si  $f$  change de signe alors il existe des tores modélés sur  $E_f^u$  dans toutes les composantes connexes de l'espace des métriques lorentziennes du tore. Sinon les tores modélés sur  $E_f^u$  appartiennent tous à la composante connexe des métriques plates.

*Preuve.* On déduit du lemme 5.17 que si  $f$  ne change pas de signe, alors les feuilletages de lumière de  $T$  n'ont pas de composantes de Reeb et donc  $T$  appartient à la composante contenant les métriques plates. D'après [1, §2.3], pour terminer la preuve il suffit de montrer que lorsque  $f$  s'annule il existe un tore modélé sur  $E^u$  dont les feuilletages de lumière ont une seule composante de Reeb et qu'il existe un tore modélé sur  $E^u$  dont l'un des feuilletages de lumière n'a aucune composante de Reeb.

La fonction  $f$  changeant de signe, il existe  $x_1 < x_2$  milieux d'intervalles de  $\mathbf{R} \setminus f^{-1}(0)$  appartenant à une même période et tels que  $f(x_1)f(x_2) < 0$ . Soit  $T$  le tore modelé sur  $E_f^u$  associé aux invariants  $(1, 0, (\bar{f}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}))$ . Ce tore ne contient que deux rubans maximaux (un pour chaque feuilletage de lumière), bordés par des bandes de type II de même signe (lemme 5.17). Chaque feuilletage de lumière de  $T$  a donc une unique composante de Reeb. Le quotient d'un ruban maximal de  $E_f^u$  par une période de  $f$  et un élément du flot (tore associé aux invariants  $(1, 0, (\bar{f}, \emptyset))$ ) fournit l'autre exemple.  $\square$

Pour la bouteille de Klein, les composantes de l'espace des métriques lorentziennes correspondent bijectivement à  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Rappelons rapidement comment réaliser une telle bijection (voir [1] pour plus de détails). La bouteille de Klein étant considérée comme une fibration en cercles, on se donne un méridien  $\beta$  (c.-à-d. une fibre de la fibration) et une âme  $\alpha$  (c.-à-d. une section de la fibration). Soit  $\xi$  un champ de droites de type temps, vu comme section du fibré projectif tangent  $P$ . Les restrictions  $P|_\beta$  et  $P|_\alpha$  sont des fibrations en cercles sur le cercle, respectivement tore et bouteille de Klein ; à homotopie près, cette dernière fibration n'admet que deux sections. Les classes d'homotopie de  $\xi|_\beta$  et de  $\xi|_\alpha$  sont donc déterminées par un degré  $n \in \mathbf{Z}$  ( $n = 0$  pour  $\xi$  tangent à  $\beta$ ) et un élément  $\bar{m} \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , et on peut vérifier que le couple  $(n, \bar{m})$  caractérise la classe d'homotopie de  $\xi$  ([1, Appendice]). Plus précisément, on convient de prendre  $\bar{m} = \bar{0}$  si  $\xi|_\alpha$  est homotope à la section tautologique (champ tangent à  $\alpha$ ), c.-à-d.  $\xi|_\alpha$  orientable, et  $\bar{m} = \bar{1}$  dans l'autre cas, c'est-à-dire si  $\xi|_\alpha$  est homotopiquement transverse à la section tautologique. Si  $n$  est impair, la métrique n'est orientable ni en temps, ni en espace. Si  $n$  est pair avec  $\bar{m} = \bar{0}$  (resp.  $\bar{m} = \bar{1}$ ), la métrique est orientable temporellement mais pas spatialement (resp. spatialement mais pas temporellement).

*Remarque 5.21.* Les méridiens sont tous isotopes : on peut à tout moment choisir  $\beta$  sans modifier  $|n|$  et  $\bar{m}$ . Il existe exactement deux classes d'isotopie d'âmes ; on peut changer le représentant de  $\alpha$  sans modifier  $n$  et  $\bar{m}$ , mais changer de classe d'isotopie transforme  $\bar{m}$  en  $\bar{m} + \bar{n}$ .

Modulo l'action des difféomorphismes, les composantes sont caractérisées par  $n_{\text{abs}} = |n|$  pour  $n$  impair et par  $(n_{\text{abs}}, \bar{m})$  pour  $n$  pair ; dans ce dernier cas, les difféomorphismes agissent trivialement sur  $\bar{m}$ . En particulier, il existe deux composantes contenant les métriques plates, indexées avec nos conventions par  $(0, \bar{0})$  et  $(0, \bar{1})$  ; elles sont fixes par l'action des difféomorphismes mais permutées par le changement de signe de la métrique.

Soit  $B$  une bouteille de Klein dont le revêtement d'orientation  $B^{\text{or}}$  admet un champ de Killing invariant  $K$ . On rappelle que  $K$  induit un feuilletage  $\mathcal{K}$  sur  $B$  ainsi qu'une fonction notée abusivement  $\langle K, K \rangle$ , constante sur les feuilles de  $\mathcal{K}$ . En particulier chaque feuille de  $\mathcal{K}$  hérite du signe  $(-1, 0 \text{ ou } 1)$  de  $\langle K, K \rangle$ . Vu que  $B$  n'admet pas de feuilletages de lumière (mais seulement un 2-tissu de lumière, voir [1]), la fonction  $\langle K, K \rangle$  ne peut être identiquement nulle. Par ailleurs, le feuilletage transverse de  $B^{\text{or}}$  induit un feuilletage de  $B$ , notée  $\mathcal{K}^\natural$ , dont toutes les feuilles sont également fermées, voir §5.2. On rappelle que dans le cas non élémentaire, les feuilles de  $\mathcal{K}^\natural$  sont des géodésiques de lumière, nécessairement brisées puisque  $B$  n'a pas de feuilletage de lumière lisse ; le lieu de bifurcation de  $\mathcal{K}^\natural$  est une réunion finie de feuilles de  $\mathcal{K}$  (milieux des bandes de type II), de signe  $\pm 1$ .

On distinguera comme plus haut deux types de bouteilles  $B$ . Quand  $B$  est de type 1, le feuilletage  $\mathcal{K}$  est un feuilletage par méridiens (donc non orientable) et l'espace de ses feuilles est un cercle ; le feuilletage transverse  $\mathcal{K}^\natural$  est orientable, l'espace de ses feuilles est un segment dont les extrémités sont les âmes de  $B$ . Pour le type 2, les rôles de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\natural$  sont inversés :  $\mathcal{K}$  est orientable, l'espace de ses feuilles est un segment dont les extrémités sont les âmes de  $B$  et  $\mathcal{K}^\natural$  est un feuilletage par méridiens, non orientable, dont l'espace des feuilles

est un cercle.

**PROPOSITION 5.22.** *Toute bouteille de Klein  $(B, \mathcal{K})$  élémentaire appartient à l'une des deux composantes connexes des métriques plates. De plus,  $(B, \mathcal{K})$  est temporellement orientable si et seulement si  $\mathcal{K}$  est du signe de  $(-1)^{\tau+1}$  pour la métrique (c.-à-d.  $(-1)^\tau \langle K, K \rangle < 0$ ), où  $\tau \in \{1, 2\}$  désigne le type de  $B$ .*

*Preuve.* Le feuilletage  $\mathcal{K}^\natural$  est ici lisse, formé des géodésiques orthogonales à  $\mathcal{K}$ . Soit  $\xi$  un champ de droites de type temps de  $B$ . On choisit comme méridien  $\beta$  une feuille de  $\mathcal{K}$  si  $\tau = 1$  ou une feuille de  $\mathcal{K}^\natural = \mathcal{K}^\perp$  si  $\tau = 2$  (voir la remarque 5.21). Ce méridien est d'un type donné (espace ou temps), donc  $\xi|_\beta$  est de degré 0 et  $B$  appartient à une composante contenant des métriques plates. Les signes de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\natural$  sont évidemment opposés et  $B$  est temporellement orientable si et seulement si  $\mathcal{K}^\natural$  (resp.  $\mathcal{K}$ ) est négatif pour  $\tau = 1$  (resp. pour  $\tau = 2$ ).  $\square$

**PROPOSITION 5.23.** *Soit  $(B, \mathcal{K})$  une bouteille de Klein non élémentaire de type  $\tau \in \{1, 2\}$  et soit  $\zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_k$  le lieu de bifurcation de  $\mathcal{K}^\natural$ . Si  $\tau = 2$ , on suppose que les  $\zeta_i$  sont indexées dans l'ordre croissant, l'espace des feuilles de  $\mathcal{K}$  étant orienté (en particulier  $\zeta_1$  et  $\zeta_k$  sont les âmes de  $B$ ).*

- (1) *Si  $\tau = 1$ , alors  $B$  appartient à l'une des deux composantes connexes des métriques plates. De plus,  $B$  est temporellement orientable si et seulement si le nombre de  $\zeta_i$  négatives est pair.*
- (2) *Si  $\tau = 2$ , on note  $(-1)^{s_1}, \dots, (-1)^{s_k}$  la suite des signes des  $(\zeta_j)$ . L'invariant entier  $n_{\text{abs}}(B) \in \mathbf{N}$  de la composante de  $B$  modulo les difféomorphismes est donné par*

$$n_{\text{abs}}(B) = \begin{cases} L_{]1, k[} & \text{si } s_1 + s_k + k \text{ est pair,} \\ L_{[1, k[} & \text{si } s_1 + s_k + k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où  $L_{]1, k[}$  (resp.  $L_{[1, k[}$ ) désigne la longueur de la suite réduite associée à  $(-1^{s_j})_{1 < j < k}$  (resp.  $(-1^{s_j})_{1 \leq j < k}$ ). De plus,  $B$  est temporellement (resp. spatialement) orientable si et seulement si  $n_{\text{abs}}(B)$  est pair et si les âmes  $\zeta_1$  et  $\zeta_k$  sont négatives (resp. positives).

*Preuve.* Pour le type 1, la vérification de la première assertion est identique à celle de la proposition 5.22, à ceci près que le méridien  $\beta$  peut ici être de lumière. Il reste à étudier l'orientabilité temporelle de  $B$ . Deux des feuilles de  $\mathcal{K}^\natural$  sont des âmes de  $B$ . Soit  $\alpha$  l'une d'entre elles et soit  $\xi^-$  un champ négatif au-dessus d'un paramétrage de  $\alpha$ , comme dans le lemme 5.15. D'après la preuve de celui-ci,  $\xi^-$  ne change de côté de  $\alpha$  qu'au passage de chaque bifurcation positive, d'où le résultat (on rappelle que  $k$  est impair).

Supposons que  $\tau = 2$ . On prend comme méridien  $\beta$  une feuille de  $\mathcal{K}^\natural$ . L'entier  $n_{\text{abs}}(B)$  est le nombre (non orienté) de demi-tours que font les cônes au-dessus de  $\beta$ . Quand on parcourt  $\beta$ , on rencontre une fois les âmes  $\zeta_1$  et  $\zeta_k$  et deux fois les autres  $(\zeta_i)$ , dans l'ordre inverse. Par le lemme 5.15, on a donc

$$\begin{aligned} n_{\text{abs}}(B) &= \frac{1}{2} \left| (-1)^{1+s_1} + \sum_{1 < j < k} (-1)^{j+s_j} + (-1)^{k+s_k} + \sum_{1 < j < k} (-1)^{2k-j+s_j} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} [(-1)^{k+s_k} - (-1)^{s_1}] + \sum_{1 < j < k} (-1)^{j+s_j} \right|, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément la formule cherchée. La dernière assertion est claire.  $\square$

*Remarque 5.24.* Les longueurs  $L_{[1,k]}$  et  $L_{[1,k]}$  ayant respectivement la parité de  $k$  et  $k+1$ , on voit que  $n_{\text{abs}}(B)$  est congru à  $s_1 + s_2$  modulo 2. On retrouve le fait que les âmes ont le même signe quand  $n_{\text{abs}}(B)$  est pair.

**COROLLAIRE 5.25.** *Soit  $f$  une fonction périodique et soit  $\mathfrak{C}_1(f) \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  l'ensemble indexant les composantes des bouteilles de Klein de type 1 modélées sur  $E_f^u$ .*

- (1) *Si  $f \geq 0$  (resp.  $f \leq 0$ ), alors  $\mathfrak{C}_1(f) = \{(0, \bar{0})\}$  (resp.  $\mathfrak{C}_1(f) = \{(0, \bar{1})\}$ ).*
- (2) *Si  $f$  change de signe, alors  $\mathfrak{C}_1(f) = \{(0, \bar{0}), (0, \bar{1})\}$ .*

*Preuve.* Si  $f \geq 0$ , alors le champ  $\mathcal{K}$  (non orientable) est de type espace ou lumière : la métrique est nécessairement temporellement orientable. À l'inverse, si  $f \leq 0$  alors  $B$  est spatialement orientable. Si  $f$  change de signe, on choisit  $t_0 > 0$  et  $x_1$  au milieu d'un intervalle de  $\mathbf{R} \setminus f^{-1}(0)$ . D'après la proposition 5.23, la bouteille associée à  $(t_0, (\bar{f}, \{\bar{x}_1\}))$  est temporellement (resp. spatialement) orientable si  $f(x_1) > 0$  (resp.  $f(x_1) < 0$ ).  $\square$

**COROLLAIRE 5.26.** *Soit  $f$  une fonction paire, périodique de plus petite période  $2\mathbf{m} > 0$  et vérifiant  $f(0)f(\mathbf{m}) \neq 0$ , et soit  $\mathfrak{C}_2(f) \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  l'ensemble indexant les composantes des bouteilles de Klein de type 2 modélées sur  $E_f^u$ .*

- (1) *Si  $f \geq 0$  (resp.  $f \leq 0$ ), alors  $\mathfrak{C}_2(f) = \{(0, \bar{1})\}$  (resp.  $\mathfrak{C}_2(f) = \{(0, \bar{0})\}$ ).*
- (2) *Si  $f$  change de signe et vérifie  $f(0)f(\mathbf{m}) > 0$ , alors  $\mathfrak{C}_2(f) = 2\mathbf{Z} \times \{\bar{0}\}$  si  $f(0) < 0$  et  $\mathfrak{C}_2(f) = 2\mathbf{Z} \times \{\bar{1}\}$  si  $f(0) > 0$ .*
- (3) *Si  $f(0)f(\mathbf{m}) < 0$ , alors  $\mathfrak{C}_2(f) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  (toute composante de l'espace des métriques contient des bouteilles de type 2 modélées sur  $E_f^u$ ).*

*Preuve.* Noter que les âmes des bouteilles de type 2 modélées sur  $E_f^u$  doivent correspondre à des points fixes des involutions de  $\text{Is}(f)$ , c'est-à-dire à des éléments de  $\mathbf{m}\mathbf{Z}$ . Par ailleurs, si l'on peut réaliser une valeur de  $n_{\text{abs}}$ , on pourra toujours réaliser les valeurs  $n = \pm n_{\text{abs}}$  (sans changer  $\bar{m}$ ) grâce à l'action d'un difféomorphisme homotope à une symétrie par rapport à un méridien, [1, p. 489].

Si  $f$  est de signe constant, alors la suite des signes des  $(\zeta_j)$  est constante et les suites réduites de  $(-1^{s_j})_{1 \leq j < k}$  (pour  $k$  pair) et de  $(-1^{s_j})_{1 \leq j < k}$  (pour  $k$  impair) sont vides. On a donc  $n_{\text{abs}}(B) = 0$  et le signe des âmes est celui de  $f$ , d'où l'assertion (1).

Si  $f$  change de signe et vérifie  $f(0)f(\mathbf{m}) > 0$ , les âmes ont à nouveau le même signe. Par conséquent  $n_{\text{abs}}(B)$  est pair (remarque 5.24) et le champ de cônes du signe de  $f(0)$  est orientable. Soit  $t_0 > 0$  et soit  $x_1 \in ]0, \mathbf{m}[$  tel que  $f(0)f(x_1) < 0$ , situé au milieu d'un intervalle de  $\mathbf{R} \setminus f^{-1}(0)$ . La bouteille associée à  $(t_0, (\bar{f}, \{\bar{0}, \bar{\mathbf{m}}\}))$  satisfait  $n_{\text{abs}} = 0$  et la bouteille  $B$  associée à  $(t_0, (\bar{f}, \{\bar{0}, \bar{x}_1, \bar{\mathbf{m}}\}))$  satisfait  $n_{\text{abs}}(B) = 2$ , proposition 5.23-(2). Par suite, le revêtement cyclique  $B_d$  de degré  $d \in \mathbf{N}^*$  de  $B$  dans le sens du méridien vérifie  $n_{\text{abs}}(B_d) = 2d$ . Toutes les composantes possibles sont donc atteintes.

Si  $f(0)f(\mathbf{m}) < 0$ , alors la bouteille  $B'$  de paramètre  $(t_0, (\bar{f}, \{\bar{0}, \bar{\mathbf{m}}\}))$  avec  $t_0 > 0$  vérifie  $n_{\text{abs}}(B') = 1$ , proposition 5.23-(2). Pour un revêtement cyclique  $B'_d$  comme ci-dessus, on a  $n_{\text{abs}}(B'_d) = d$  ( $d \in \mathbf{N}^*$ ). Soit  $\Phi$  un difféomorphisme qui permute les âmes à isotopie près. Si  $d$  est impair, l'action de  $\Phi$  sur  $B'_d$  modifie  $\bar{m}$  par changement de l'âme de référence, [1, remarque A.1]. On atteint ainsi toutes les composantes avec  $n_{\text{abs}}$  impair. Considérons maintenant  $f$  comme une fonction  $4\mathbf{m}$ -périodique vérifiant  $f(0)f(2\mathbf{m}) > 0$ . Quitte à remplacer  $f(x)$  par  $f(x + \mathbf{m})$ , on peut choisir le signe de  $f(0)$  : l'assertion (2) montre donc que toutes les composantes avec  $n_{\text{abs}}$  pair sont atteintes.  $\square$

## 5.4 Points conjugués

LEMME 5.27. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et soit  $f \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ . On suppose qu'il existe  $C > 0$  et  $\epsilon = \pm 1$  tels que  $\{\epsilon f < C^2\}$  disconnecte  $I$  (c'est le cas par exemple si  $f$  change de signe au moins deux fois). Alors la métrique lorentzienne  $2dx dy + f(x)dy^2$  définie sur  $I \times \mathbf{R}$  a des points conjugués. En particulier, tout ruban ouvert contenant deux demi-bandes (voir remarque 2.19) de même signe, ou une bande et deux demi-bandes, admet des points conjugués.

*Preuve.* Le champ de Killing  $\partial_y$  est un champ de Jacobi le long de toute géodésique. Nous allons montrer l'existence d'une géodésique tangente à  $\partial_y$  en deux points distincts et distincte d'une orbite de  $\partial_y$ . On peut supposer que  $\epsilon C^2$  est une valeur régulière de  $f$ . Soit  $[a, b[$  une composante connexe relativement compacte de  $\{\epsilon f < C^2\}$ . On a forcément  $f(a) = f(b) = \epsilon C^2$  et  $f'(a)f'(b) \neq 0$ . Soit  $\gamma$  la géodésique telle que  $\gamma(0) = (a, 0)$  et  $\gamma'(0) = \epsilon \partial_y / C$ . L'écriture des deux intégrales premières (l'énergie et Clairaut) donne :

$$\begin{cases} f(x)y' + x' = C, \\ f(x)y'^2 + 2x'y' = \epsilon. \end{cases}$$

On en déduit que  $x'^2 = C^2 - \epsilon f(x)$  d'où  $\epsilon f(x) \leq C^2$ . Comme  $f'(a) \neq 0$ ,  $x'$  n'est pas identiquement nulle. Pour  $t > 0$  et tant que  $x(t)$  reste inférieur à  $b$ , on a  $x'(t) > 0$  et donc  $y' = \frac{1}{f}(C - \sqrt{C^2 - \epsilon f})$ . On en déduit que  $y'$  reste borné (même si  $f$  s'annule) tant que  $x$  ne prend pas la valeur  $b$ , puis que  $x(t)$  tend vers  $b$ . Pour voir que la valeur  $b$  est atteinte, on considère la géodésique  $\gamma_1 = (x_1, y_1)$  vérifiant  $\gamma_1(0) = (b, 0)$  et  $\gamma_1'(0) = \epsilon \partial_y / C$ . Il existe  $t_0 > 0$  et  $t_1 < 0$  tels que  $x(t_0) > x_1(t_1)$ . Par conséquent il existe  $s \in \mathbf{R}$  tel que  $\gamma$  et  $\Phi_{\partial_y}^s \circ \gamma_1$  se croisent. Par suite les géodésiques  $\gamma$  et  $\gamma_1$  coïncident au paramétrage près et  $\gamma$  est bien deux fois tangente à  $\partial_y$ .  $\square$

PROPOSITION 5.28. Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien muni d'un champ de Killing. Si  $T$  n'est pas plat, alors l'extension réflexive  $E_f^u$  associée à  $(T, K)$  a des points conjugués.

*Preuve.* L'extension  $E_f^u$  contient des rubans isométriques à  $(\mathbf{R}^2, 2dx dy + f(x)dy^2)$  avec  $f$  périodique. Si  $f$  n'est pas constante (c.-à-d. si  $T$  n'est pas plat), alors ou bien  $f$  change une infinité de fois de signe, ou bien  $f$  ou  $-f$  admet un minimum positif ou nul, distinct de son maximum. Dans les deux cas, le lemme 5.27 permet de conclure que  $E^u$  possède des points conjugués.  $\square$

THÉORÈME 5.29. Soit  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  une fonction périodique non constante et soit  $T$  un tore modelé sur  $E_f^u$ . Si  $T$  est sans points conjugués alors

- (1) l'ensemble de composantes connexes de  $\{f \neq 0\}$  est localement fini,
- (2) toute composante définit une bande de type II de  $T$ ,
- (3)  $f$  est de signe différent sur deux composantes consécutives,
- (4)  $f'$  ne change de signe qu'une fois sur chaque composante.

En particulier,  $T$  n'est pas homotope à un tore plat.

*Preuve.* D'après le lemme 5.27, la fonction  $f$  doit changer de signe, sans quoi  $f$  ou  $-f$  admettrait un minimum positif ou nul ( $f$  étant périodique). Rappelons que les composantes de  $\{f \neq 0\}$  (modulo une certaine période de  $f$ ) correspondent aux bandes de  $T$ . Soit  $R$  un ruban maximal de  $T$ . Toujours grâce au lemme 5.27, on voit que  $R$  ne peut contenir plus de deux demi-bandes, d'où (1). En particulier  $R$  ne peut contenir de bandes de type I, d'où (2).

Finalement, l'adhérence de tout ruban maximal de  $T$  doit être formée de deux bandes de types II séparées par une composante connexe de  $\{f = 0\}$  et vérifiant (3) et (4) (encore le lemme 5.27). Par conséquent, la suite des signes de  $f$  sur les bandes de type II est forcément réduite (définition 5.14) et  $T$  n'est pas homotope à un tore plat.  $\square$

*Remarque 5.30.* La fonction sinus est l'une des fonctions les plus naturelles satisfaisant les assertions (1), (3) et (4) du théorème 5.29. Les tores modelés sur  $E_{\sin}^u$  satisfaisant (2) sont (à homothétie près) les tores de Clifton-Pohl. Nous avons montré qu'un tore possédant un champ de Killing, sans points conjugués et non plat doit ressembler à un tore de Clifton-Pohl. Rappelons que ceux-ci n'ont pas de points conjugués [1].

**PROPOSITION 5.31.** *Soit  $T$  un tore lorentzien sans points conjugués et ayant un champ de Killing non trivial. Alors il existe une suite de tores lorentziens possédant des points conjugués et convergeant vers  $T$  pour la topologie  $C^\infty$ .*

*Preuve.* Si  $T$  n'est pas plat et n'a pas de points conjugués, alors, d'après le lemme 5.27, la fonction  $\langle K, K \rangle$  change de signe à chaque fois qu'elle s'annule. Si la fonction  $\langle K, K \rangle$  s'annule sur un ouvert, alors on peut la perturber de façon à faire apparaître un minimum local positif et donc des points conjugués. Sinon tous les zéros sont isolés et, quitte à perturber la fonction, on peut supposer qu'il existe une bande bordée par deux orbites de  $K$  le long desquelles la dérivée de  $\langle K, K \rangle$  ne s'annule pas. Cette bande se complète alors en un carré ayant deux vrais points selles. Toutes les géodésiques perpendiculaires à  $K$  de ce carré passent alors par ces points selles. On obtient ainsi deux points conjugués sur le bord de  $T$ . On répète alors la preuve de la proposition 2.3 de [1] qui consiste à perturber la métrique de façon à rapprocher ces points conjugués.

Enfin, si  $T$  est plat, il possède un champ de Killing périodique  $K$ . On construit par perturbation conforme une suite de tores non plats invariants par le flot de  $K$  qui converge vers  $T$ . Par le théorème 5.29, ces tores ont des points conjugués.  $\square$

## Références

- [1] Christophe Bavard and Pierre Mounoud. Sur les surfaces lorentziennes compactes sans points conjugués. *Geom. Topol.*, 17(1) :469–492, 2013.
- [2] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [3] Allan L. Edmonds, Ravi S. Kulkarni, and Robert E. Stong. Realizability of branched coverings of surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(2) :773–790, 1984.
- [4] Jacqueline Ferrand. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Math. Ann.*, 304(2) :277–291, 1996.
- [5] William M. Goldman. Geometric structures on manifolds and varieties of representations. In *Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987)*, volume 74 of *Contemp. Math.*, pages 169–198. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [6] Manuel Gutiérrez, Francisco J. Palomo, and Alfonso Romero. Lorentzian manifolds with no null conjugate points. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 137(2) :363–375, 2004.
- [7] André Haefliger and Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseignement Math. (2)*, 3 :107–125, 1957.



- [8] Vladimir S. Matveev. Pseudo-Riemannian metrics on closed surfaces whose geodesics flows admit nontrivial integrals quadratic in momenta, and proof of the projective Obata conjecture for two-dimensional pseudo-Riemannian metrics. *J. Math. Soc. Japan*, 64(1) :107–152, 2012.
- [9] Daniel Monclair. Isometries of Lorentz surfaces and convergence groups. *Math. Ann.*, 363(1-2) :101–141, 2015.
- [10] Pierre Mounoud and Stefan Suhr. Spacelike Zoll surfaces with symmetries. *J. Diff. Geom.*, à paraître (arXiv : 1402.5377).
- [11] Katsumi Nomizu. On local and global existence of Killing vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 72 :105–120, 1960.
- [12] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.
- [13] Richard S. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 73 :295–323, 1961.
- [14] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14 :57–59, 1965.
- [15] Paolo Piccione and Abdelghani Zeghib. Actions of discrete groups on stationary Lorentz manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34(5) :1640–1673, 2014.
- [16] Miguel Sánchez. Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(3) :1063–1080, 1997.
- [17] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.
- [18] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, sixth edition, 2011.

Adresse : Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France  
 CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France  
 E-mails : `christophe.bavard@math.u-bordeaux1.fr`  
`pierre.mounoud@math.u-bordeaux1.fr`